ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

16

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1892—93.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 16. — 1892—1893. — TOME 16.

ERRATA.

Page 220, ligne 26, au lieu de $[i, k = \pm(m+1), \ldots, \pm(m+p)]$ lisez $[i = \pm(m+1), \ldots, \pm(m+p),\ k = -(m+p), \ldots, +(m+p);\ i = -m, \ldots, +m,\ k = \pm(m+1), \ldots, \pm(m+p)]$.

Page 223, ligne 22, lisez $D'_m = -D_m$.

» 228, formule (h), ajoutez le terme Σa_{pp}.

» 239, formule (h), ajoutez le terme $S' = \Sigma a_{pp}$.

» 242, ligne 15, au lieu de a_{ik} lisez a_{ii}.

» 270, ligne 1, au lieu de *ne se coupe pas soi-même* lisez *embrasse l'origine une seule fois.*

» 271, ligne 17, au lieu de $y_{r.\nu_r}$ lisez $y_{r.1}$.

» 281, ligne 3, au lieu de $\bar{u}_{\nu-1}$ lisez $\bar{u}_\nu$.

» 293, seconde formule, au lieu de $p_1 < \ldots < p_k$ lisez $p_1 < p_2 - 1 < \ldots < p_k - k + 1$.

» 294, dernière formule, et page 295, première formule, au lieu de p lisez $p - 1$.

ÜBER BIEGUNGSINVARIANTEN.

EINE ANWENDUNG DER LIE'SCHEN GRUPPENTHEORIE

VON

KASIMIR ŻORAWSKI

aus WARSCHAU.

Biegungsinvarianten werden wir solche Functionen des Ortes in einer Fläche nennen, welche bei jeder Biegung der Fläche in jedem Orte ihren ursprünglichen Zahlenwert behalten.[1] Das GAUSS'ische Krümmungsmass, die BELTRAMI'schen Parameter und MINDING's geodätische Krümmung z. B. sind Biegungsinvarianten. Sie sind von den genannten Mathematikern schon längst aufgestellt worden. Im Jahre 1884 skizzierte Herr LIE eine Methode zur Berechnung aller möglichen Biegungsinvarianten.[2] In der vorliegenden Arbeit teile ich dasjenige mit, was mir auf diesem Wege in Bezug auf die Theorie der Biegungsinvarianten zu erreichen gelungen ist.

Es war eben Herr LIE selbst, welcher mich dieses Problem zu behandeln veranlasste. Er richtete meine Aufmerksamkeit hauptsächlich darauf, dass es wichtig wäre, die Anzahl der Biegungsinvarianten verschiedener Ordnungen zu kennen.[3] Demgemäss bildet die Abzählung der

[1] Diese Benennung ist von Herrn WEINGARTEN eingeführt worden (Journal f. r. u. ang. Math., Bd. 94, S. 182). Herr WEINGARTEN nennt aber Biegungsinvarianten nur diejenigen Functionen, welche wir später (N° 13) als Gaussische Biegungsinvarianten bezeichnen. Es scheint nämlich zweckmässig, für alle Differentialinvarianten einer unendlichen Gruppe, die wir im Folgenden (N° 4) definieren werden, den gemeinsamen Namen »Biegungsinvarianten» einzuführen.

[2] Mathem. Annal., Bd. 24, S. 574—575.

[3] Es handelt sich natürlich um die Anzahl der *unabhängigen* Biegungsinvarianten, wobei zu bemerken ist, dass je N Biegungsinvarianten, etwa $I_1, I_2, \ldots, I_N$, dann und nur dann von einander unabhängig sind, wenn keine Identität von der Form $F(I_1, I_2, \ldots, I_N) = 0$ besteht.

Biegungsinvarianten den Hauptinhalt meiner Arbeit. Doch beschäftige ich mich in den zwei letzten Paragraphen auch mit der Berechnung der Biegungsinvarianten durch Integration von gewissen vollständigen Systemen. Ich darf hier bemerken, dass Herr LIE, als ich mich mit diesem Probleme zu beschäftigen anfing, mir die Resultate einer nicht gedruckten Arbeit von seinem Schüler Herrn HARTMANN mitteilte, in der nach der LIE'schen Methode die bekannten Biegungsinvarianten aufgestellt werden. Diese Rechnungen findet man bei mir im § VI; es schien mir aber bequemer, dieselben etwas anders durchzuführen, als es Herr HARTMANN gethan.

Auf die geometrische Bedeutung der Biegungsinvarianten gehe ich nicht ein.

Den Herren LIE und ENGEL erlaube ich mir hiermit für Ihre wohlwollende Unterstützung meinen besten Dank auszusprechen.

---

§ I. *Einige Hülfssätze.*

Es scheint mir zweckmässig und sogar nötig zu sein, den nachstehenden Untersuchungen einige Hülfssätze vorauszuschicken, um später die Discussion meines Problems nicht unterbrechen zu müssen.

1. Zuerst führe ich ein Theorem an, auf welchem die ganze Theorie der Differentialinvarianten der unendlichen continuierlichen Gruppen basiert.

Theorem I. *Bezeichnet*

$$Xf = \sum_1^n {}_i\, \xi_i(x, z) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m {}_\mu\, \zeta_\mu(x, z) \frac{\partial f}{\partial z_\mu}$$

die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen continuierlichen Transformationsgruppe in den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n; z_1, z_2, \ldots, z_m$, und betrachtet man die z_μ als beliebig wählbare Functionen der x_i, so werden auch die Differentialquotienten der z_μ nach den x_i transformiert.

Bezeichnet man im Allgemeinen:

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = F_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}$$

und berechnet die Incremente aller genannten Differentialquotienten von der ersten bis etwa zur N^{ten} *Ordnung, so bildet:*

$$X^{(N)}f = Xf + \sum \zeta_\mu^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}(x, z, z_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}) \frac{\partial f}{\partial z_{\mu,\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}},$$

$$(\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) \leqq (\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)$$

wo die letzte Summe alle Glieder enthält, welche allen Differentialquotienten der z_μ *nach der* x_i *von der ersten bis zur* N^{ten} *Ordnung entsprechen, die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen continuierlichen Transformationsgruppe, welche man* N^{te} *erweiterte Gruppe zu nennen pflegt.*[1]

Dieses Theorem benutzte Herr Lie in seiner Theorie der Differentialinvarianten,[2] ohne es ausdrücklich zu formulieren und zu beweisen. Herr Lie teilte mir mit, dass er dieses Theorem bewiesen und den Beweis in nächster Zeit veröffentlichen werde. Demnach glaube ich, dieses Theorem benutzen zu dürfen.

2. Jetzt werden wir ein Theorem aus der Theorie der Transformationsgruppen beweisen, welches trotz seiner speciellen Voraussetzungen uns im Folgenden gute Dienste leisten wird. Dieses Theorem lautet folgendermassen:

Theorem II. *Besitzt die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen continuierlichen Transformationsgruppe in den Veränderlichen* $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m$ *die Form:*

$$(1) \qquad Zf = \sum_1^{p+r}{}_k \zeta_k(x_1, \ldots, x_n) Z_k f,$$

---

[1] Dieser Satz ist analog dem entsprechenden Satze aus der Theorie der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen. Siehe: Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen.* Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. F. Engel bearbeitet. Leipzig, Teubner. 1888. S. 547, Theorem 94. Die Formulierung des Theorems I ist eine etwas abweichende von der des Theorems 94.

[2] Sophus Lie, Mathem. Ann., Bd. 24: *Über Differentialinvarianten.* S. 564 ff.

Biegungsinvarianten den Hauptinhalt meiner Arbeit. Doch beschäftige ich mich in den zwei letzten Paragraphen auch mit der Berechnung der Biegungsinvarianten durch Integration von gewissen vollständigen Systemen. Ich darf hier bemerken, dass Herr LIE, als ich mich mit diesem Probleme zu beschäftigen anfing, mir die Resultate einer nicht gedruckten Arbeit von seinem Schüler Herrn HARTMANN mitteilte, in der nach der LIE'schen Methode die bekannten Biegungsinvarianten aufgestellt werden. Diese Rechnungen findet man bei mir im § VI; es schien mir aber bequemer, dieselben etwas anders durchzuführen, als es Herr HARTMANN gethan.

Auf die geometrische Bedeutung der Biegungsinvarianten gehe ich nicht ein.

Den Herren LIE und ENGEL erlaube ich mir hiermit für Ihre wohlwollende Unterstützung meinen besten Dank auszusprechen.

---

§ 1. *Einige Hülfssätze.*

Es scheint mir zweckmässig und sogar nötig zu sein, den nachstehenden Untersuchungen einige Hülfssätze vorauszuschicken, um später die Discussion meines Problems nicht unterbrechen zu müssen.

1. Zuerst führe ich ein Theorem an, auf welchem die ganze Theorie der Differentialinvarianten der unendlichen continuierlichen Gruppen basiert.

Theorem I. *Bezeichnet*

$$Xf = \sum_1^n {}_i\, \xi_i(x, z) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_1^m {}_\mu\, \zeta_\mu(x, z) \frac{\partial f}{\partial z_\mu}$$

die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen continuierlichen Transformationsgruppe in den Veränderlichen $x_1, x_2, \dots, x_n$; $z_1, z_2, \dots, z_m$, und betrachtet man die z_μ als beliebig wählbare Functionen der x_i, so werden auch die Differentialquotienten der z_μ nach den x_i transformiert.

Bezeichnet man im Allgemeinen:

$$\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n} F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_2} \dots \partial x_n^{a_n}} = F_{a_1 a_2 \dots a_n}$$

und berechnet die Incremente aller genannten Differentialquotienten von der ersten bis etwa zur N^{ten} Ordnung, so bildet:

$$X^{(N)}f = Xf + \sum \zeta_{\mu}^{a_1 a_2 \dots a_n}(x, z, z_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}) \frac{\partial f}{\partial z_{\mu, a_1 a_2 \dots a_n}},$$
$$(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n) \leqq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

wo die letzte Summe alle Glieder enthält, welche allen Differentialquotienten der z_μ nach der x_i von der ersten bis zur N^{ten} Ordnung entsprechen, die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen continuierlichen Transformationsgruppe, welche man N^{te} erweiterte Gruppe zu nennen pflegt.[1]

Dieses Theorem benutzte Herr Lie in seiner Theorie der Differentialinvarianten,[2] ohne es ausdrücklich zu formulieren und zu beweisen. Herr Lie teilte mir mit, dass er dieses Theorem bewiesen und den Beweis in nächster Zeit veröffentlichen werde. Demnach glaube ich, dieses Theorem benutzen zu dürfen.

2. Jetzt werden wir ein Theorem aus der Theorie der Transformationsgruppen beweisen, welches trotz seiner speziellen Voraussetzungen uns im Folgenden gute Dienste leisten wird. Dieses Theorem lautet folgendermassen:

Theorem II. *Besitzt die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen continuierlichen Transformationsgruppe in den Veränderlichen $x_1, \dots, x_n$; $y_1, \dots, y_m$ die Form:*

$$Zf = \sum_{1}^{p+r}{}_k \zeta_k(x_1, \dots, x_n) Z_k f, \tag{1}$$

[1] Dieser Satz ist analog dem entsprechenden Satze aus der Theorie der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen. Siehe: Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen.* Erster Abschnitt. Unter Mitwirkung von Dr. F. Engel bearbeitet. Leipzig, Teubner. 1888. S. 547, Theorem 94. Die Formulierung des Theorems I ist eine etwas abweichende von der des Theorems 94.

[2] Sophus Lie, Mathem. Ann., Bd. 24: *Über Differentialinvarianten.* S. 564 ff.

wo

$$Z_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

$$Z_l f = \sum_1^m {}_i\, \eta_{li}(y_1, \ldots, y_m) \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad {\scriptstyle (l=p+1,\ldots,p+r)}$$

gegebene Ausdrücke sind und die ζ_k ganz willkürliche Functionen ihrer Argumente bezeichnen, so bilden die infinitesimalen Transformationen:

$$Z_{p+1}f, \; Z_{p+2}f, \ldots, Z_{p+r}f$$

eine höchstens r-gliedrige endliche continuierliche Gruppe.

Je zwei unabhängige infinitesimale Transformationen der Schar (1), etwa

$$Zf = \sum_1^{p+r} {}_k\, \zeta_k Z_k f \quad \text{und} \quad Z'f = \sum_1^{p+r} {}_{k'}\, \zeta'_{k'} Z_{k'} f$$

sollen durch die Operation (ZZ') eine infinitesimale Transformation derselben Schar ergeben.[1] Nun haben wir:

$$(ZZ') = \sum_1^{p+r} {}_k \sum_1^{p+r} {}_{k'} \{[\zeta_{k'} Z_{k'}(\zeta'_k) - \zeta'_{k'} Z_{k'}(\zeta_k)] Z_k f + \zeta_k \zeta'_{k'} (Z_k Z_{k'})\}.$$

Weil aber $Z_k f$ für $k = 1, 2, \ldots, p$ nur die Veränderliche x_i und für $k = p+1, \ldots, p+r$ nur die Veränderliche y_i enthält, so folgt:

$$(ZZ') = \sum_1^{p} {}_k \sum_1^{p} {}_{k'} \{[\zeta_{k'} Z_{k'}(\zeta'_k) - \zeta'_{k'} Z_{k'}(\zeta_k)] Z_k f + \zeta_k \zeta'_{k'} (Z_k Z_{k'})\}$$

$$+ \sum_{p+1}^{p+r} {}_l \sum_1^{p} {}_{k'} [\zeta_{k'} Z_{k'}(\zeta'_l) - \zeta'_{k'} Z_{k'}(\zeta_l)] Z_l f + \sum_{p+1}^{p+r} {}_l \sum_{p+1}^{p+r} {}_{l'} \zeta_l \zeta'_{l'} (Z_l Z_{l'}).$$

Da nun dieser Ausdruck einem Ausdrucke von der Form:

$$Z''f = \sum_1^{p} {}_k\, \zeta''_k(x_1, \ldots, x_n) Z_k f + \sum_{p+1}^{p+r} {}_l\, \zeta''_l(x_1, \ldots, x_n) Z_l f$$

identisch gleich sein soll, so müssen die Glieder, welche $Z_k f$ und die

[1] Sophus Lie, *Über Differentialinvarianten,* S. 553 und Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger 1883, *Über unendliche continuierliche Gruppen,* S. 4.

Glieder, welche $Z_l f$ enthalten, in beiden Ausdrücken identisch gleich sein. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn

$$(Z_k Z_{k'}) = \sum_1^p {}_s\, \omega_{kk's}(x_1, \ldots, x_n)\, Z_s f, \qquad (k, k' = 1, 2, \ldots, p)$$

$$(Z_l Z_{l'}) = \sum_{p+1}^{p+r} {}_\sigma\, \varpi_{ll'\sigma}(x_1, \ldots, x_n)\, Z_\sigma f. \qquad (l, l' = p+1, \ldots, p+r)$$

Ferner hängen die Z_l nur von den Veränderlichen y_i ab; es müssen also die Functionen $\varpi_{ll'\sigma}$ constante Werte haben, welche wir wie gewöhnlich mit $c_{ll'\sigma}$ bezeichnen.

Folglich:

$$(Z_l Z_{l'}) = \sum_{p+1}^{p+r} {}_\sigma\, c_{ll'\sigma} Z_\sigma f,$$

und damit ist unser Satz bewiesen.

3. In diesen einleitenden Bemerkungen sollen noch zwei einfache Sätze Platz finden, welche wir dazu benutzen, um die Unabhängigkeit von gewissen linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen 1^{ter} Ordnung mit einer abhängigen Variablen nachzuweisen.

Satz I: *Sind die q Gleichungen:*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

von einander unabhängig, so sind die q Gleichungen:

$$Z_k f = X_k f + \sum_1^m {}_\mu\, \zeta_{k\mu}(x_1, \ldots, x_n;\, z_1, \ldots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0,$$

wo die $\zeta_{k\mu}$ willkürlich wählbare Functionen ihrer Argumente bezeichnen, ebenfalls von einander unabhängig.

Nach Voraussetzung kann nämlich der Identität:

$$\chi_1(x_1, \ldots, x_n) X_1 f + \ldots + \chi_q(x_1, \ldots, x_n) X_q f = 0$$

nur durch die Werte:

$$\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_q = 0$$

Genüge geleistet werden. Besteht andererseits die Identität:

$$\bar{\chi}_1(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) Z_1 f + \ldots + \bar{\chi}_q(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) Z_q f = 0,$$

so muss auch diejenige bestehen, welche wir aus dieser durch die Annahme:

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial z_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_m} = 0$$

erhalten. Es muss also die Identität:

$$\bar{\chi}_1(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) X_1 f + \ldots + \bar{\chi}_q(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) X_q f = 0$$

gelten, welche augenscheinlich nur durch die Werte:

$$\bar{\chi}_1 = \bar{\chi}_2 = \ldots = \bar{\chi}_q = 0$$

befriedigt sein kann; damit ist der Satz bewiesen.

Satz II: *Sind die q Gleichungen:*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \qquad (k=1,2,\ldots,q)$$

von einander unabhängig, so sind die $q+\rho$ Gleichungen:

$$Z_k f = X_k f + \sum_1^m {}_\mu\, \zeta_{k\mu}(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_\mu} = 0, \qquad (k=1,2,\ldots,q)$$

$$Z_l f = \sum_1^m {}_\nu\, \zeta_{l\nu}(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = 0, \qquad (l=q+1,\ldots,q+\rho)$$

wo die $\zeta_{k\mu}$ und $\zeta_{l\nu}$ willkürlich wählbare Functionen ihrer Argumente bezeichnen, dann und nur dann von einander unabhängig, wenn die ρ Gleichungen:

$$Z_l f = 0 \qquad (l=q+1,\ldots,q+\rho)$$

von einander unabhängig sind.

Setzen wir nämlich in der Identität:

$$\chi_1(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) Z_1 f + \ldots + \chi_q(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) Z_q f + \ldots$$
$$\ldots + \chi_{q+\rho}(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) Z_{q+\rho} f = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_1} = \frac{\partial f}{\partial z_2} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial z_m} = 0,$$

so erhalten wir die Identität:

$$\chi_1(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) X_1 f + \ldots + \chi_q(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) X_q f = 0,$$

welche nach Voraussetzung nur durch die Werte:

$$\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_q = 0$$

befriedigt werden kann. Es ergiebt sich also die Identität:

$$\chi_{q+1}(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_m) Z_{q+1} f + \ldots + \chi_{q+p}(x_1, \ldots, x_n; z_1, \ldots, z_n) Z_{q+p} f = 0,$$

welche augenscheinlich nur dann durch keine anderen Werte als die:

$$\chi_{q+1} = \chi_{q+2} = \ldots = \chi_{q+p} = 0$$

befriedigt wird, wenn die Gleichungen:

$$Z_l f = 0 \qquad (l = q+1, \ldots, q+p)$$

von einander unabhängig sind. Damit ist der Satz bewiesen.

§ II. *Unendliche Gruppe des Problems. Erweiterte Gruppen.*

Jetzt werden wir nach Herrn LIE's Vorgang [1] unser Problem analytisch formulieren.

4. Es seien:

$$(1) \qquad p = p(x, y), \qquad q = q(x, y), \qquad r = r(x, y),$$

wo x, y willkürliche Parameter bezeichnen, die Gleichungen einer Fläche in Cartesischen Coordinaten p, q, r.

Das Quadrat des Linienelementes auf der Fläche (1), nämlich:

$$ds^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2$$

kann man nach GAUSS [2] in der Form:

$$(2) \qquad ds^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2$$

---

[1] SOPHUS LIE. *Über Differentialinvarianten,* S. 574.

[2] GAUSS. *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

schreiben, wo:

$$E = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2, \qquad F = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial r}{\partial y},$$

$$G = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2.$$

Führen wir in (2) neue Veränderliche:

$$(\alpha) \qquad x' = X(x, y), \qquad y' = Y(x, y)$$

ein, wo X, Y ganz willkürliche Functionen von x, y bezeichnen. Das Linienelement erhält dann die neue Form:

$$ds^2 = E'dx'^2 + 2F'dx'dy' + G'dy'^2,$$

wo E', F', G' gewisse Functionen, welche man leicht berechnen kann, etwa:

$$(\beta) \qquad E' = R(x, y, E, F, G), \qquad F' = S(x, y, E, F, G),$$
$$G' = T(x, y, E, F, G)$$

der Veränderlichen x, y, E, F, G sind. Es ist leicht nachzuweisen, dass die Schar der Transformationen (α) und (β) der Veränderlichen x, y, E, F, G eine unendliche Gruppe bildet.

Transformiert man nämlich vermöge einer willkürlichen, aber bestimmten Transformation unserer Schar die Variablen x, y, E, F, G in x_1, y_1, E_1, F_1, G_1, so bekommt man aus dem Linienelemente (2) das Linienelement:

$$ds^2 = E_1 dx_1^2 + 2F_1 dx_1 dy_1 + G_1 dy_1^2.$$

Nimmt man ferner anstatt der Veränderlichen x_1, y_1, E_1, F_1, G_1 neue x_2, y_2, E_2, F_2, G_2, welche wieder mit den eben genannten durch eine willkürliche, aber bestimmte Transformation unserer Schar verknüpft sind, so erhält man die Form:

$$ds^2 = E_2 dx_2^2 + 2F_2 dx_2 dy_2 + G_2 dy_2^2.$$

Es ist nun unmittelbar klar, dass man, um von der Form (2) zu dieser dritten Form des Linienelementes zu gelangen, d. h. um von den Veränderlichen x, y, E, F, G unmittelbar zu den x_2, y_2, E_2, F_2, G_2 überzugehen, notwendig eine Transformation unserer Schar benutzen muss. Je zwei aufeinander folgende Transformationen unserer Schar sind also immer einer gewissen einzigen Transformation dieser Schar aequivalent, d. h. unsere Schar bildet eine *unendliche Gruppe*. Bei dieser Gruppe bleibt das Linienelement invariant, es müssen also ihre Differentialinvarianten *Biegungsinvarianten* sein. Wir werden mit infinitesimalen Transformationen operieren.

Setzen wir also voraus, dass die Veränderliche x, y ganz willkürliche Incremente:

$$\delta x = \xi(x, y)\delta t, \qquad \delta y = \eta(x, y)\delta t \tag{3}$$

erhalten, dass also ξ, η ganz willkürliche Functionen von x, y bezeichnen. Formuliert man analytisch die Bedingung, dass das Linienelement bei unserer Gruppe unverändert bleibt, so erhält man:

$$\delta E dx^2 + 2\delta F dx dy + \delta G dy^2 + 2\{(Edx + Fdy)(\xi_{10}dx + \xi_{01}dy) + (Fdx + Gdy)(\eta_{10}dx + \eta_{01}dy)\}\delta t = 0,$$

wo wir für die partiellen Differentialquotienten die im Theorem I eingeführte Bezeichnung benutzen. Weil aber dx, dy hier vollkommen willkürlich sind, so ergeben sich folgende Incremente für E, F, G:

$$\left\{\begin{aligned} \delta E &= -2(E\xi_{10} + F\eta_{10})\delta t, \\ \delta F &= -(F\xi_{10} + E\xi_{01} + G\eta_{10} + F\eta_{01})\delta t, \\ \delta G &= -2(F\xi_{01} + G\eta_{01})\delta t. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Die allgemeinste infinitesimale Transformation unserer Gruppe lautet also:

$$\mathfrak{S}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} - 2(E\xi_{10} + F\eta_{10})\frac{\partial f}{\partial E} - (F\xi_{10} + E\xi_{01} + G\eta_{10} + F\eta_{01})\frac{\partial f}{\partial F} - 2(F\xi_{01} + G\eta_{01})\frac{\partial f}{\partial G}.$$

Die Berechnung der Biegungsinvarianten kommt somit zurück auf die Berechnung der Differentialinvarianten dieser unendlichen Gruppe.

Um diese vorzunehmen, wollen wir unsere Gruppe erweitern:

1) in bezug auf die Differentialquotienten von E, F, G nach x, y;

2) in bezug auf die Differentialquotienten von willkürlich wählbaren Functionen $\varphi^1(x, y), \varphi^2(x, y), \ldots, \varphi^m(x, y)$, welche augenscheinlich bei allen Transformationen der Gruppe ihren Zahlenwert nicht verändern, und endlich

3) in bezug auf die Differentialquotienten von y nach x, y als Function von x betrachtet. Um diese Erweiterungen durchzuführen, wollen wir im Folgenden einige Hülfsformeln entwickeln.

5. Setzen wir voraus, dass der Zuwachs einer gewissen Function $\psi(x, y)$ bekannt ist, und versuchen wir die Zuwüchse aller ihrer Differentialquotienten nach x und y zu berechnen! Wohl zu bemerken ist, dass wir für die partiellen Differentialquotienten stets die im Theorem I eingeführte Bezeichnung benutzen werden, also im Falle der Functionen von zwei Veränderlichen die Bezeichnung:

$$\frac{\partial^{i+k}\Phi(x, y)}{\partial x^i \partial y^k} = \Phi_{ik}.$$

Für jede Function $\psi(x, y)$ haben wir nun:

$$\text{(a)} \qquad d\psi - \psi_{10}dx - \psi_{01}dy = 0.$$

Berücksichtigt man alsdann, dass:

$$\delta d\psi = d\delta\psi = \left[\left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{10} dx + \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{01} dy\right]\delta t$$

und variiert (a) unter der Voraussetzung, dass x, y die Incremente (3) annehmen, so erhält man:

$$\left[\left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{10} dx + \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{01} dy\right]\delta t - \delta\psi_{10}dx - \delta\psi_{01}dy - \psi_{10}(\xi_{10}dx + \xi_{01}dy)\delta t$$
$$- \psi_{01}(\eta_{10}dx + \eta_{01}dy) = 0.$$

Weil aber diese Gleichung bei allen Werten von dx, dy bestehen soll, so ergiebt sich:

$$\text{(b)} \quad \frac{\delta\psi_{10}}{\delta t} = \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{10} - \psi_{10}\xi_{10} - \psi_{01}\eta_{10}, \qquad \frac{\delta\psi_{01}}{\delta t} = \left(\frac{\delta\psi}{\delta t}\right)_{01} - \psi_{10}\xi_{01} - \psi_{01}\eta_{01}.$$

Setzt man in der ersten dieser Formeln ψ_{10} anstatt ψ, so gelangt man zur Formel:

$$\frac{\partial\psi_{20}}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{20}-2(\psi_{20}\xi_{10}+\psi_{11}\eta_{10})-(\psi_{10}\xi_{20}+\psi_{01}\eta_{20}),$$

und in analoger Weise ergiebt sich:

$$\frac{\partial\psi_{30}}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{30}-3(\psi_{30}\xi_{10}+\psi_{21}\eta_{10})-3(\psi_{20}\xi_{20}+\psi_{11}\eta_{20})-(\psi_{10}\xi_{30}+\psi_{01}\eta_{30}).$$

Man sieht leicht, dass man allgemein erhält:

$$\text{(c)}\qquad \frac{\partial\psi_{i0}}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{i0}-\sum_{1}^{i}{}_{\mu}\, i_{\mu}(\psi_{i-\mu+1,0}\xi_{\mu 0}+\psi_{i-\mu,1}\eta_{\mu 0}),$$

wo i_μ die gewöhnliche Bezeichnung der Binomialcoefficienten ist. Die letzte Formel soll durch vollständige Induction verificiert werden. Setzt man nämlich in (c) ψ_{10} statt ψ, so ergiebt sich vermöge der ersten Formel (b):

$$\frac{\partial\psi_{i+1,0}}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{i+1,0}-\sum_{0}^{i}{}_{\mu}\, i_{\mu}(\psi_{i-\mu+1,0}\xi_{\mu+1,0}+\psi_{i-\mu,1}\eta_{\mu+1,0})$$
$$-\sum_{1}^{i}{}_{\mu}\, i_{\mu}(\psi_{i-\mu+2,0}\xi_{\mu 0}+\psi_{i-\mu+1,1}\eta_{\mu 0}).$$

Durch einfache Operationen mit Benutzung der Formel $i_\mu+i_{\mu-1}=(i+1)_\mu$ erhält man schliesslich:

$$\frac{\partial\psi_{i+1,0}}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{i+1,0}-\sum_{1}^{i+1}{}_{\mu}(i+1)_{\mu}(\psi_{i-\mu+2,0}\xi_{\mu 0}+\psi_{i-\mu+1,1}\eta_{\mu 0}),$$

woraus die Richtigkeit der Formel (c) folgt.

Wenn wir die Formel (c) mit der ersten Formel (b) vergleichen, so sehen wir, dass die zweiten Indices in beiden Formeln dieselben sind; der erste Index bei $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ ist in (c) um $i-1$ grösser als in (b), und unter der Summe sind in (c) bei ψ die ersten Indices um $i-\mu$ und bei ξ und η um $\mu-1$ grösser als in (b). Demnach erhalten wir in analoger Weise aus der zweiten Formel (b) die Formel:

$$\text{(d)}\qquad \frac{\partial\psi_{0k}}{\partial t}=\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{0k}-\sum_{1}^{k}{}_{\nu}\, k_{\nu}(\psi_{1,k-\nu}\xi_{0\nu}+\psi_{0,k-\nu+1}\eta_{0\nu}).$$

Setzt man in (d) ψ_{i0} an Stelle von ψ, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial\psi_{ik}}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi_{i0}}{\partial t}\right)_{0k} - \sum_{1}^{k}{}_{\nu} k_\nu(\psi_{i+1,k-\nu}\xi_{0\nu} + \psi_{i,k-\nu+1}\eta_{0\nu}),$$

wo nach (c):

$$\left(\frac{\partial\psi_{i0}}{\partial t}\right)_{0k} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{ik} - \sum_{1}^{i}{}_{\mu} i_\mu \sum_{0}^{k}{}_{\nu} k_\nu(\psi_{i-\mu+1,k-\nu}\xi_{\mu\nu} + \psi_{i-\mu,k-\nu+1}\eta_{\mu\nu});$$

also ist die allgemeinste Formel:

$$\text{(e)} \qquad \frac{\partial\psi_{ik}}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{ik} - \sum_{0}^{i}{}'_{\mu} \sum_{0}^{k}{}'_{\nu} i_\mu k_\nu(\psi_{i-\mu+1,k-\nu}\xi_{\mu\nu} + \psi_{i-\mu,k-\nu+1}\eta_{\mu\nu}),$$

wo die Striche an den Summenzeichen bedeuten, dass die Indices μ und ν nicht gleichzeitig beide gleich Null sein dürfen.

6. Setzen wir jetzt:

$$\text{(f)} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = \rho^{10}\xi_{10} + \rho^{01}\xi_{01} + \sigma^{10}\eta_{10} + \sigma^{01}\eta_{01},$$

wo $\rho^{10}, \rho^{01}, \sigma^{10}, \sigma^{01}$ gewisse Functionen der Veränderlichen x, y bezeichnen, so haben wir:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{i0} = \sum_{0}^{i}{}_{\mu} i_\mu(\rho^{10}_{i-\mu,0}\xi_{\mu+1,0} + \rho^{01}_{i-\mu,0}\xi_{\mu 1} + \sigma^{10}_{i-\mu,0}\eta_{\mu+1,0} + \sigma^{01}_{i-\mu,0}\eta_{\mu 1})$$

und ferner:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{ik} = \sum_{0}^{i}{}_{\mu} \sum_{0}^{k}{}_{\nu} i_\mu k_\nu(\rho^{10}_{i-\mu,k-\nu}\xi_{\mu+1,\nu} + \rho^{01}_{i-\mu,k-\nu}\xi_{\mu,\nu-1}$$
$$+ \sigma^{10}_{i-\mu,k-\nu}\eta_{\mu+1,\nu} + \sigma^{01}_{i-\mu,k-\nu}\eta_{\mu,\nu+1}),$$

oder:

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{ik} = \sum_{1}^{i+1}{}_{\mu} \sum_{0}^{k}{}_{\nu} i_{\mu-1} k_\nu(\rho^{10}_{i-\mu+1,k-\nu}\xi_{\mu\nu} + \sigma^{10}_{i-\mu+1,k-\nu}\eta_{\mu\nu})$$
$$+ \sum_{0}^{i}{}_{\mu} \sum_{1}^{k+1}{}_{\nu} i_\mu k_{\nu-1}(\rho^{01}_{i-\mu,k-\nu+1}\xi_{\mu\nu} + \sigma^{01}_{i-\mu,k-\nu+1}\eta_{\mu\nu}).$$

Wenn wir jetzt annehmen, dass alle Coefficienten i_p und k_q, für welche p von $0, 1, \ldots, i$ und q von $0, 1, \ldots, k$ verschieden, Null sind, so können wir schreiben:

$$\text{(g)} \quad \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial t} = \sum_{0}^{i+1}{}'_{\mu} \sum_{0}^{k+1}{}'_{\nu} \Big\{ \big(i_{\mu-1} k_{\nu} \rho^{10}_{i-\mu+1,k-\nu} + i_{\mu} k_{\nu-1} \rho^{01}_{i-\mu,k-\nu+1} - i_{\mu} k_{\nu} \psi_{i-\mu+1,k-\nu} \big) \xi_{\mu\nu}$$

$$+ \big(i_{\mu-1} k_{\nu} \sigma^{10}_{i-\mu+1,k-\nu} + i_{\mu} k_{\nu-1} \sigma^{01}_{i-\mu,k-\nu+1} - i_{\mu} k_{\nu} \psi_{i-\mu,k-\nu+1} \big) \eta_{\mu\nu} \Big\}.$$

Wohl zu beachten ist hierbei, dass i_p und k_q für $i = k = p = q = 0$ gleich 1 sind.

7. Versuchen wir nunmehr aus den bekannten Incrementen (3) von x, y die Incremente der Differentialquotienten y nach x zu bestimmen! Wir können hier die Formel (c) benutzen; weil (y als Function von x betrachtet) y, $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$ Functionen einer einzigen Veränderlichen x sind, so werden in der Formel (c), $\psi = y$ gesetzt, alle partiellen Differentialquotienten nach y verschwinden und alle partiellen Differentialquotienten nach x sich in totale nach x verwandeln.

Demnach haben wir:

$$\text{(h)} \qquad \frac{\partial y^{(l)}}{\partial t} = \frac{d^l \eta}{dx^l} - \sum_{1}^{l}{}_{\lambda} l_{\lambda} y^{(l-\lambda+1)} \frac{d^{\lambda} \xi}{dx^{\lambda}}.$$

Die Berechnung dieser Incremente kommt also zurück auf die Berechnung der totalen Differentialquotienten einer Function $\zeta(x, y)$ nach x, wo y eine gewisse Function von x ist. Wir haben unmittelbar:

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\zeta}{dx} = \zeta_{10} + y'\zeta_{01}, \\[2ex] \dfrac{d^2\zeta}{dx^2} = y''\zeta_{01} + \zeta_{20} + 2y'\zeta_{11} + y'^2\zeta_{02}, \\[2ex] \dfrac{d^3\zeta}{dx^3} = y'''\zeta_{01} + 3y''\zeta_{11} + 3y'y''\zeta_{02} + \zeta_{30} + 3y'\zeta_{21} + 3y'^2\zeta_{12} + y'^3\zeta_{03}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Obwohl die Aufgabe, eine allgemeine Formel abzuleiten, gelöst ist,[1] ist diese Formel doch so compliciert, dass andere Formeln, welche wir aus dieser ableiten könnten, für eine weitere Betrachtung ungeeignet wären.

---

[1] F. Bessel: *Über die Entwickelung der höheren Differentiale zusammengesetzter und implicieter Functionen.* Diss. Jena 1872.

Für unsere Zwecke wird es genügen, die ersten Formeln der Reihe (i) zu kennen. Mit Hülfe der Formeln (i) haben wir:

$$
(6)\quad \begin{cases}
\dfrac{\delta y'}{\delta t} = \eta_{10} + y'\eta_{01} - y'(\xi_{10} + y'\xi_{01}), \\[2ex]
\dfrac{\delta y''}{\delta t} = y''\eta_{10} + \eta_{20} + 2y'\eta_{11} + y'^2\eta_{02} - 2y''\xi_{10} - 3y'y''\xi_{01} \\
\qquad\qquad - y'(\xi_{20} + 2y'\xi_{11} + y'^2\xi_{02}), \\[2ex]
\dfrac{\delta y'''}{\delta t} = y'''\eta_{01} + 3y''\eta_{11} + 3y'y''\eta_{02} + \eta_{30} + 3y'\eta_{21} + 3y'^2\eta_{12} + y'^3\eta_{03} \\
\quad - 3y'''\xi_{10} - (4y'y''' + 3y''^2)\xi_{01} - 3y''\xi_{20} - 9y'y''\xi_{11} - 6y'^2y''\xi_{02} \\
\qquad\qquad - y'(\xi_{30} + 3y'\xi_{21} + 3y'^2\xi_{12} + y'^3\xi_{03}), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{cases}
$$

Man sieht aber leicht, dass im Allgemeinen das Increment $\frac{\delta y^{(l)}}{\delta t}$ die Form:

$$
(7)\qquad \frac{\delta y^{(l)}}{\delta t} = \sum_{0}^{l}{}'_{\mu} \sum_{0}^{l-\mu}{}'_{\nu} [g^l_{\mu\nu}(y', \ldots, y^{(l)})\xi_{\mu\nu} + h^l_{\mu\nu}(y', \ldots, y^{(l)})\eta_{\mu\nu}]
$$

hat, wo die $g^l_{\mu\nu}$ und $h^l_{\mu\nu}$ gewisse ganze Functionen ihrer Argumente bezeichnen.

8. Wir werden zuerst die Formel (g) auf die Functionen E, F, G anwenden. Aus den Formeln (4) erkennt man, was für Werte die Functionen $\rho^{10}, \rho^{01}, \sigma^{10}, \sigma^{01}$ hier erhalten, und zwar bekommen wir folgende Incremente:

$$
(8)\quad \begin{cases}
\dfrac{\delta E_{ik}}{\delta t} = -\sum_{0}^{i+1}{}'_{\mu} \sum_{0}^{k+1}{}'_{\nu} \{k_\nu(2i_{\mu-1} + i_\mu) E_{i-\mu+1,k-\nu}\xi_{\mu\nu} \\
\qquad\qquad + k_\nu(2i_{\mu-1}F_{i-\mu+1,k-\nu} + i_\mu E_{i-\mu,k-\nu+1})\eta_{\mu\nu}\}, \\[2ex]
\dfrac{\delta F_{ik}}{\delta t} = -\sum_{0}^{i+1}{}'_{\mu} \sum_{0}^{k+1}{}'_{\nu} \{[(i+1)_\mu k_\nu F_{i-\mu+1,k-\nu} + i_\mu k_{\nu-1} E_{i-\mu,k-\nu+1}]\xi_{\mu\nu} \\
\qquad\qquad + [i_\mu(k+1)_\nu F_{i-\mu,k-\nu+1} + i_{\mu-1}k_\nu G_{i-\mu+1,k-\nu}]\eta_{\mu\nu}\}, \\[2ex]
\dfrac{\delta G_{ik}}{\delta t} = -\sum_{0}^{i+1}{}'_{\mu} \sum_{0}^{k+1}{}'_{\nu} \{i_\mu(2k_{\nu-1}F_{i-\mu,k-\nu+1} + k_\nu G_{i-\mu+1,k-\nu})\xi_{\mu\nu} \\
\qquad\qquad + i_\mu(2k_{\nu-1} + k_\nu) G_{i-\mu,k-\nu+1}\eta_{\mu\nu}\}.
\end{cases}
$$

Nimmt man alle Differentialquotienten bis zur n^{ten} Ordnung inclusive, so ergiebt sich eine erweiterte Gruppe:

$$(9)\qquad \mathfrak{G}^{(n)}f = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \sum_0^n{}_i \sum_0^{n-i}{}_k \left(\frac{\partial E_{ik}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial E_{ik}} + \frac{\partial F_{ik}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial F_{ik}} + \frac{\partial G_{ik}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial G_{ik}}\right),$$

welche wir als *Gaussische* n^{te} *erweiterte Gruppe* bezeichnen werden.

Nimmt man eine Reihe von Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m$ der Veränderlichen x, y, so hat man:

$$\frac{\partial \varphi^s}{\partial t} = 0; \qquad (s=1,2,\dots,m)$$

es ergeben sich also die Incremente ihrer Differentialquotienten unmittelbar aus der Formel (e). Wir erhalten nämlich:

$$(10)\qquad \frac{\partial \varphi^s_{ik}}{\partial t} = -\sum_0^i{}'_\mu \sum_0^k{}'_\nu \, i_\mu k_\nu (\varphi^s_{i-\mu+1,k-\nu}\xi_{\mu\nu} + \varphi^s_{i-\mu,k-\nu+1}\eta_{\mu\nu}). \qquad (s=1,2,\dots,m)$$

Demnach bilden wir die erweiterte Gruppe:

$$(11)\qquad \mathfrak{B}^{(n)}f = \mathfrak{G}^{(n-1)}f + \sum_1^m{}_s \sum_0^n{}_i \sum_0^{n-i}{}_k \frac{\partial \varphi^s_{ik}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \varphi^s_{ik}},$$

welche wir *Beltramische* n^{te} *erweiterte Gruppe* nennen werden.

Die Incremente von $y', y'', \dots, y^{(n)}$ sind in der Formel (7) gegeben. Die infinitesimale Transformation:

$$(12)\qquad \mathfrak{M}^{(n)}f = \mathfrak{G}^{(n-1)}f + \sum_1^n{}_l \frac{\partial y^{(l)}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y^{(l)}}$$

ist auch die allgemeinste infinitesimale Transformation einer unendlichen Gruppe, welche wir als *Mindingsche* n^{te} *erweiterte Gruppe* bezeichnen werden.

Endlich die Gruppe:

$$(13)\qquad \mathfrak{A}^{(n)}f = \mathfrak{G}^{(n-1)}f + \sum_1^m{}_s \sum_0^n{}_i \sum_0^{n-i}{}_k \frac{\partial \varphi^s_{ik}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial \varphi^s_{ik}} + \sum_1^n{}_l \frac{\partial y^{(l)}}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial y^{(l)}}$$

wollen wir *allgemeine* n^{te} *erweiterte Gruppe* nennen.

Nach dem Theorem I sind (9), (11), (12), (13) wirklich allgemeinste infinitesimale Transformationen von gewissen unendlichen continuierlichen Gruppen.

§ III. *Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten.*

Die Differentialinvarianten der Gruppe (5) ergeben sich als Lösungen gewisser Systeme linearer homogener partieller Differentialgleichungen 1ter Ordnung mit einer abhängigen Variablen. Diese Systeme erhält man, indem man alle Coefficienten der willkürlichen Functionen: ξ, η und $\xi_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ in (9), (11), (12), (13) gleich Null setzt. Hierbei ist zunächst zu beachten, dass:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

woraus folgt, dass die Differentialinvarianten unserer Gruppe explicite von x, y unabhängig sind. Wir brauchen nun nur noch diejenigen Gleichungen zu beachten, welche wir aus den Coefficienten von $\xi_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ erhalten.

9. Wir beginnen mit der *Gaussischen Gruppe* (9). Setzt man in (9) die Ausdrücke (8) ein, so ergiebt sich folgendes System von partiellen Differentialgleichungen:

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\alpha)\quad \mathfrak{G}^{(n)}_{\mu\nu} f = \sum_{\mu-1}^{n}{}'_i \sum_{\nu-1}^{n-i}{}'_k \Big\{ (2i_{\mu-1} + i_\mu) k_\nu E_{i-\mu+1,k-\nu} \frac{\partial f}{\partial E_{ik}} \\
&\qquad + [(i+1)_\mu k_\nu F_{i-\mu+1,k-\nu} + i_\mu k_{\nu-1} E_{i-\mu,k-\nu+1}] \frac{\partial f}{\partial F_{ik}} \\
&\qquad + i_\mu (2k_{\nu-1} F_{i-\mu,k-\nu+1} + k_\nu G_{i-\mu+1,k-\nu}) \frac{\partial f}{\partial G_{ik}} \Big\} = 0, \\
&\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\mu\nu} f = \sum_{\mu-1}^{n}{}'_i \sum_{\nu-1}^{n-i}{}'_k \Big\{ k_\nu (2i_{\mu-1} F_{i-\mu+1,k-\nu} + i_\mu E_{i-\mu,k-\nu+1}) \frac{\partial f}{\partial E_{ik}} \\
&\qquad + [i_\mu (k+1)_\nu F_{i-\mu,k-\nu+1} + i_{\mu-1} k_\nu G_{i-\mu+1,k-\nu}] \frac{\partial f}{\partial F_{ik}} \\
&\qquad + i_\mu (2k_{\nu-1} + k_\nu) G_{i-\mu,k-\nu+1} \frac{\partial f}{\partial G_{ik}} \Big\} = 0. \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, n+1 \\ \nu = 0, 1, \ldots, n+1-\mu \\ \mu = \nu \neq 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right.$$

Wir haben die unteren Grenzen der Summation nach i und k gleich $\mu - 1$ und $\nu - 1$ gesetzt, weil die, zu kleineren Werten von i und k

gehörigen Glieder der Summen gleich Null sind. Die Striche an den Summenzeichen bedeuten, dass nicht gleichzeitig $i = \mu - 1$ und $k = \nu - 1$ sein soll, weil die zu diesem Wertpaar i, k gehörigen Glieder der Summen verschwinden. $\mu = \nu \neq 0$ soll bedeuten, dass μ und ν nicht gleichzeitig Null sein können.

Den Gleichungen $\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\mu\nu} f = 0$ kann man eine bequemere Form geben. Vertauschen wir nämlich in $\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\mu\nu} f$ gleichzeitig die Indices μ mit ν, und i mit k und beachten, dass die Summation $\sum\limits_{\nu=1}^{n}{}'_{k} \sum\limits_{\mu=1}^{n-k}{}'_{i}$ durch die Summation $\sum\limits_{\mu=1}^{n}{}'_{i} \sum\limits_{\nu=1}^{n-i}{}'_{k}$ ersetzt werden kann, so ergeben sich an Stelle der Gleichungen $\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\mu\nu} f = 0$ die folgenden:

$$
(14)(\beta) \qquad \begin{aligned}
\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\nu\mu} f = \sum_{\mu=1}^{n}{}'_{i} \sum_{\nu=1}^{n-i}{}'_{k} \Big\{ & (2 i_{\mu-1} + i_\mu) k_\nu G_{k-\nu, i-\mu+1} \frac{\partial f}{\partial G_{ki}} \\
& + [(i+1)_\mu k_\nu F_{k-\nu, i-\mu+1} + i_\mu k_{\nu-1} G_{k-\nu+1, i-\mu}] \frac{\partial f}{\partial F_{ki}} \\
& + i_\mu (2 k_{\nu-1} F_{k-\nu+1, i-\mu} + k_\nu E_{k-\nu, i-\mu+1}) \frac{\partial f}{\partial E_{ki}} \Big\} = 0. \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, n+1 \\ \nu = 0, 1, \ldots, n+1-\mu \\ \mu = \nu \neq 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Wir haben also den Satz:

Satz III: *Hat man alle Gleichungen $\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu\nu} f = 0$ aufgestellt, so kann man die Gleichungen $\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\nu\mu} f = 0$ ohne weiteres angeben. Aus jeder Gleichung $\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu\nu} f = 0$ ergiebt sich nämlich die entsprechende Gleichung $\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\nu\mu} f = 0$ durch gleichzeitige Vertauschung einerseits der Buchstaben E und G, andererseits der Indices von E, F, G.*

Dieser Satz ist von praktischer Wichtigkeit für die Aufstellung genannter Gleichungen bei gegebenen Werten von n.

10. Wenn die Gleichungen (14)(α) und (β) aufgestellt sind, so hat man, um die Gleichungen $\mathfrak{G}^{(n+1)}_{\mu\nu} f = 0$ und $\bar{\mathfrak{G}}^{(n+1)}_{\nu\mu} f = 0$ zu berechnen, erstens zu den Ausdrücken $\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu\nu} f$ und $\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\nu\mu} f$ gewisse Glieder hinzuzufügen und zweitens eine gewisse Anzahl von neuen Gleichungen zu bilden. Es ist nämlich leicht nachzuweisen, dass sich für $\mu = 0, 1, \ldots, n+1$; $\nu = 0, 1, \ldots, n+1-\mu$: $\mathfrak{G}^{(n+1)}_{\mu\nu} f$ von $\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu\nu} f$ nur durch solche additive Glieder unterscheidet, welche wir dadurch erhalten, dass wir in den Gliedern, die in $\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu\nu} f$ unter dem

Summenzeichen stehen, $k = n + 1 - i$ setzen und nach i von $\mu - 1$ bis $n + 1$ summieren.[1] Das Entsprechende gilt für $\bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n+1)}f$. Was die anderen Gleichungen anbetrifft, so kann man die Gleichungen $\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n+1)}f = 0$ für $\mu = 0, 1, \ldots, n + 2$; $\nu = n + 2 - \mu$ dadurch erhalten, dass man in den Gliedern, welche in $\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)}f$ unter dem Summenzeichen stehen, $k = n + 1 - i$ setzt und nach i von $\mu - 1$ bis $n + 1$ summiert.[2] Die entsprechenden Gleichungen $\bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n+1)}f = 0$ werden natürlich in derselben Weise aus den Gleichungen $\bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n)}f = 0$ gebildet. Andererseits können wir auch zur Aufstellung der Gleichungen $\bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n+1)}f = 0$ den Satz III benutzen.

Wenn wir also jetzt annehmen, dass $\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)}f$ und $\bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n)}$ identisch Null sind, sobald $\mu + \nu = n + 2$ ist, so ergiebt sich:

---

[1] Man bemerke, dass erstens jedes Glied der Summe, für welches i oder k negativ ausfällt, gleich Null ist und zweitens die untere Grenze der Summation stets kleiner, als die obere ist. Bezeichnet man also mit a_{ik} alles, was unter dem Zeichen der Summe steht, so kann man schreiben:

$$\sideset{}{'_i}\sum_{\mu-1}^{n+1} \sideset{}{'_k}\sum_{\nu-1}^{n+1-i} a_{ik} = \sideset{}{_i}\sum_{\mu-1}^{n+1} (a_{i,\nu-1} + \ldots + a_{i,n-i} + a_{i,n+1-i})$$

$$= \sideset{}{'_i}\sum_{\mu-1}^{n} \sideset{}{'_k}\sum_{\nu-1}^{n-i} a_{ik} + \sideset{}{_k}\sum_{\nu-1}^{-1} a_{n+1,k} + \sideset{}{_i}\sum_{\mu-1}^{n+1} a_{i,n+1-i},$$

woraus folgt:

$$\sideset{}{'_i}\sum_{\mu-1}^{n+1} \sideset{}{'_k}\sum_{\nu-1}^{n+1-i} a_{ik} = \sideset{}{_i}\sum_{\mu-1}^{n} \sideset{}{_k}\sum_{\nu-1}^{n-i} a_{ik} + \sideset{}{_i}\sum_{\mu-1}^{n+1} a_{i,n+1-i},$$

was eben bewiesen werden sollte.

[2] In ähnlicher Weise haben wir:

$$\sideset{}{'_i}\sum_{\mu-1}^{n+1} \sideset{}{'_k}\sum_{n+1-\mu}^{n+1-i} a_{ik} = \sideset{}{_k}\sum_{n+1-\mu}^{n+2-\mu} a_{\mu-1,k} + \sideset{}{_k}\sum_{n+1-\mu}^{n+1-\mu} a_{\mu k} + \sideset{}{_k}\sum_{n+1-\mu}^{n-\mu} a_{\mu+1,k} + \ldots + \sideset{}{_k}\sum_{n+1-\mu}^{0} a_{n+1,k};$$

weil aber nicht gleichzeitig $i = \mu - 1$ und $k = n + 1 - \mu$ sein können, so ergiebt sich:

$$\sideset{}{'_i}\sum_{\mu-1}^{n+1} \sideset{}{'_k}\sum_{n+1-\mu}^{n+1-i} a_{ik} = a_{\mu-1,n+2-\mu} + a_{\mu,n+1-\mu} + a_{\mu+1,n-\mu} + \ldots + a_{n+1,0} = \sideset{}{_i}\sum_{\mu-1}^{n+1} a_{i,n+1-i},$$

was eben zu beweisen war.

$$
(15)\left\{
\begin{aligned}
&\mathfrak{S}^{(n+1)}_{\mu\nu}f = \mathfrak{S}^{(n)}_{\mu\nu}f + \sum_{n-1}^{n+1}{}_{\iota}\Big\{(2i_{\mu-1} + i_{\mu})(n+1-i)_{\nu}E_{\iota-\mu+1,n+1-\iota-\nu}\frac{\partial f}{\partial E_{\iota,n+1-\iota}}\\
&\qquad + [(i+1)_{\mu}(n+1-i)_{\nu}F_{\iota-\mu+1,n+1-\iota-\nu}\\
&\qquad + i_{\mu}(n+1-i)_{\nu-1}E_{\iota-\mu,n+2-\iota-\nu}]\frac{\partial f}{\partial F_{\iota,n+1-\iota}}\\
&\qquad + i_{\mu}[2(n+1-i)_{\nu-1}F_{\iota-\mu,n+2-\iota-\nu}\\
&\qquad + (n+1-i)_{\nu}G_{\iota-\mu+1,n+1-\iota-\nu}]\frac{\partial f}{\partial G_{\iota,n+1-\iota}}\Big\} = 0,\\
&\overline{\mathfrak{S}}^{(n+1)}_{\nu\mu}f = \overline{\mathfrak{S}}^{(n)}_{\nu\mu}f + \sum_{\mu-1}^{n+1}{}_{\iota}\Big\{(2i_{\mu-1} + i_{\mu})(n+1-i)_{\nu}G_{n+1-\iota-\nu,\iota-\mu+1}\frac{\partial f}{\partial G_{n+1-\iota,\iota}}\\
&\qquad + [(i+1)_{\mu}(n+1-i)_{\nu}F_{n+1-\iota-\nu,\iota-\mu+1}\\
&\qquad + i_{\mu}(n+1-i)_{\nu-1}G_{n+2-\iota-\nu,\iota-\mu}]\frac{\partial f}{\partial F_{n+1-\iota,\iota}}\\
&\qquad + i_{\mu}[2(n+1-i)_{\nu-1}F_{n+2-1-\nu,\iota-\mu}\\
&\qquad + (n+1-i)_{\nu}E_{n+1-\iota-\nu,\iota-\mu+1}]\frac{\partial f}{\partial E_{n+1-\iota,\iota}}\Big\} = 0.
\end{aligned}
\right.
\qquad \begin{pmatrix}\mu=0,1,\ldots,n+2\\ \nu=0,1,\ldots,n+2-\mu\\ \mu-\nu\neq 0\end{pmatrix}
$$

11. Wir wollen jetzt diejenigen Gleichungen (15) näher betrachten, in welchen $\nu = n + 2 - \mu$ ist. Wir können die Gleichungen $\mathfrak{S}^{(n+1)}_{\mu,n+2-\mu}f = 0$ folgendermassen schreiben:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{S}^{(n+1)}_{\mu,n+2-\mu}f = \sum_{\mu-1}^{n+1}{}_{\iota}\Big\{&(2i_{\mu-1} + i_{\mu})(n+1-i)_{n+2-\mu}E_{\iota-\mu+1,\mu-\iota-1}\frac{\partial f}{\partial E_{\iota,n+1-\iota}}\\
+ [(i+1)_{\mu}&(n+1-i)_{n+2-\mu}F_{\iota-\mu+1,\mu-\iota-1} + i_{\mu}(n+1-i)_{n+1-\mu}E_{\iota-\mu,\mu-\iota}]\frac{\partial f}{\partial F_{\iota,n+1-\iota}}\\
+ i_{\mu}[2(n&+1-i)_{n+1-\mu}F_{\iota-\mu,\mu-\iota} + (n+1-i)_{n+2-\mu}G_{\iota-\mu+1,\mu-\iota-1}]\frac{\partial f}{\partial G_{\iota,n+1-\iota}}\Big\} = 0
\end{aligned}
$$

$$(\mu = 0, 1, \ldots, n+2)$$

und analog die Gleichungen $\mathfrak{S}^{(n+1)}_{n+2-\mu,\mu}f = 0$. Man sieht unmittelbar, dass in den Gleichungen $\mathfrak{S}^{(n+1)}_{\mu,n+2-\mu}f = 0$ i nur die Werte $\mu - 1$ und μ erhalten kann; bei $i > \mu$ verschwinden alle Glieder unter dem Summenzeichen. Führt man die Summation aus, so ergiebt sich:

$$(16)\quad \begin{cases} \mathfrak{S}^{(n+1)}_{\mu,n+2-\mu}f = 2E\dfrac{\partial f}{\partial E_{\mu-1,n+2-\mu}} + F\dfrac{\partial f}{\partial F_{\mu-1,n+2-\mu}} + E\dfrac{\partial f}{\partial F_{\mu,n+1-\mu}} \\ \qquad\qquad + 2F\dfrac{\partial f}{\partial G_{\mu,n+1-\mu}} = 0, \\ \mathfrak{S}^{(n+1)}_{n+2-\mu,\mu}f = 2G\dfrac{\partial f}{\partial G_{n+2-\mu,\mu-1}} + F\dfrac{\partial f}{\partial F_{n+2-\mu,\mu-1}} + G\dfrac{\partial f}{\partial F_{n+1-\mu,\mu}} \\ \qquad\qquad + 2F\dfrac{\partial f}{\partial E_{n+1-\mu,\mu}} = 0. \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n+2) \end{cases}$$

Wohl zu beachten ist, dass für $\mu = 0$ und $\mu = n + 2$ die Glieder mit negativen Indices ausgelassen werden müssen.

Die Gleichungen $\mathfrak{S}^{(n+1)}_{\mu,n+2-\mu}f = 0$ und $\mathfrak{S}^{(n+1)}_{\mu,n+2-\mu}f = 0$ können wir in der Form:

$$E\left(\frac{\partial f}{\partial F_{\mu,n+1-\mu}} + 2\frac{\partial f}{\partial E_{\mu-1,n+2-\mu}}\right) + F\left(\frac{\partial f}{\partial F_{\mu-1,n+2-\mu}} + 2\frac{\partial f}{\partial G_{\mu,n+1-\mu}}\right) = 0,$$

$$F\left(\frac{\partial f}{\partial F_{\mu,n+1-\mu}} + 2\frac{\partial f}{\partial E_{\mu-1,n+2-\mu}}\right) + G\left(\frac{\partial f}{\partial F_{\mu-1,n+2-\mu}} + 2\frac{\partial f}{\partial G_{\mu,n+1-\mu}}\right) = 0$$

angeben. Weil die Determinante $EG - F^2$ von Null verschieden ist, so erhält man die Gleichungen:

$$(16')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial F_{\mu,n+1-\mu}} + 2\dfrac{\partial f}{\partial E_{\mu-1,n+2-\mu}} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial F_{\mu-1,n+2-\mu}} + 2\dfrac{\partial f}{\partial G_{\mu,n+1-\mu}} = 0, \end{cases} \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n+2)$$

welche den Gleichungen (16) äquivalent sind. Schreibt man alle diese Gleichungen der Reihe nach auf:

$$
(16'') \qquad \left\{ \begin{array}{ll}
\dfrac{\partial f}{\partial F_{0,n+1}} = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial G_{0,n+1}} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial F_{1n}} + 2\dfrac{\partial f}{\partial E_{0,n+1}} = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial F_{0,n+1}} + 2\dfrac{\partial f}{\partial G_{1n}} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial F_{2,n-1}} + 2\dfrac{\partial f}{\partial E_{1n}} = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial F_{1n}} + 2\dfrac{\partial f}{\partial G_{2,n-1}} = 0, \\[2ex]
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial F_{n1}} + 2\dfrac{\partial f}{\partial E_{n-1,2}} = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial F_{n-1,2}} + 2\dfrac{\partial f}{\partial G_{n1}} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial F_{n+1,0}} + 2\dfrac{\partial f}{\partial E_{n1}} = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial F_{n1}} + 2\dfrac{\partial f}{\partial G_{n+1,0}} = 0, \\[2ex]
\dfrac{\partial f}{\partial E_{n+1,0}} = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial F_{n+1,0}} = 0,
\end{array} \right.
$$

so sicht man, dass sie für alle möglichen Werthe von n von einander unabhängig sind. Also sind auch alle Gleichungen (16) von einander unabhängig. Dieses Resultat erlaubt uns einen Satz aufzustellen, welcher die Frage, ob die Gleichungen (14) von einander unabhängig sind oder nicht, zu entscheiden gestattet. Bezeichnet man nämlich im Allgemeinen die Gleichungen, welche alle Differentialinvarianten bis zur n^{ten} Ordnung definieren, als *Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gruppe,* und wendet man den Satz II auf das System (15) an, so gewinnt man den folgenden Satz:

Satz IV: *Sind alle Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe von einander unabhängig, so sind auch alle Gleichungen der $(n+1)^{\text{ten}}$ erweiterten Gaussischen Gruppe von einander unabhängig.*

Mit Hülfe der Gleichungen (16′) kann man den Gleichungen (15), für welche $\mu = 0, 1, \ldots, n+1$; $\nu = 0, 1, \ldots, n+1-\mu$, eine andere Form geben. Aus den Gleichungen (16′) ergiebt sich nämlich:

$$
\underset{(i=0,1,\ldots,n)}{\frac{\partial f}{\partial E_{i,n+1-i}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial F_{i+1,n-i}}}, \qquad \underset{(i=1,2,\ldots,n+1)}{\frac{\partial f}{\partial G_{i,n+1-i}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial F_{i-1,n+2-i}}}.
$$

Berücksichtigt man, dass diejenigen Differentialquotienten, für welche ein

Index negativ ausfällt, identisch Null sind, so kann man die erhaltenen Werte in $\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n+1)}f$ einsetzen. Es ergiebt sich:

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n+1)}f = \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)}f - \frac{1}{2}\sum_{\mu}^{n+2}{}_i[2(i-1)_{\mu-1} + (i-1)_\mu](n+2-i)_\nu E_{i-\mu,n+2-i-\nu}\frac{\partial f}{\partial F_{i,n+1-i}}$$
$$+\sum_{\mu-1}^{n+1}{}_i[(i+1)_\mu(n+1-i)_\nu F_{i-\mu+1,n+1-i-\nu} + i_\mu(n+1-i)_{\nu-1}E_{i-\mu,n+2-i-\nu}]\frac{\partial f}{\partial F_{i,n+1-i}}$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\mu-2}^{n}{}_i(i+1)_\mu[2(n-i)_{\nu-1}F_{i-\mu+1,n+1-i-\nu} + (n-i)_\nu G_{i-\mu+2,n-i-\nu}]\frac{\partial f}{\partial F_{i,n+1-i}} = 0.$$

Als Grenzen der Summation kann man hier überall $\mu - 1$ und n nehmen. In der That: weil $2(\mu-2)_{\mu-1} + (\mu-2)_\mu = 0$, $\frac{\partial f}{\partial F_{n+1,0}} = 0$ nach (16″) und $\frac{\partial f}{\partial F_{n+2,-1}} = 0$, so sind die zu $i \mp \mu - 1, n+1, n+2$ gehörigen Glieder unter dem ersten Summenzeichen identisch Null; da ferner $\frac{\partial f}{\partial F_{n+1,0}} = 0$, so ist das zu $i = n+1$ gehörige Glied unter dem zweiten Summenzeichen gleich Null; endlich verschwindet noch das zu $i = \mu - 2$ gehörige Glied unter dem dritten Summenzeichen, da $(\mu-1)_\mu = 0$ ist. Demnach können wir das System (15) in der Form:

$$(17)\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)}f + \sum_{\mu-1}^{n}{}_i\Big\{\Big[i_\mu(n+1-i)_{\nu-1} - \Big((i-1)_{\mu-1} + \frac{1}{2}(i-1)_\mu\Big)(n+2-i)_\nu\Big]E_{i-\mu,n+2-i-\nu}\\
&\qquad + (i+1)_\mu(n-i)_\nu\Big(F_{i\ \mu+1,n+1-i-\nu} - \frac{1}{2}G_{i\ \mu+2,n-i-\nu}\Big)\Big\}\frac{\partial f}{\partial F_{i,n+1-i}} = 0,\\
&\bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n)}f + \sum_{\mu-1}^{n}{}_i\Big\{\Big[i_\mu(n+1-i)_{\nu-1} - \Big((i-1)_{\mu-1} + \frac{1}{2}(i-1)_\mu\Big)(n+2-i)_\nu\Big]G_{n+2-i-\nu,i-\mu}\\
&\qquad + (i+1)_\mu(n-1)_\nu\Big(F_{n+1-i-\nu,i-\mu+1} - \frac{1}{2}E_{n-i-\nu,i-\mu+2}\Big)\Big\}\frac{\partial f}{\partial F_{n+1-i,i}} = 0,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \begin{pmatrix}\mu=0,1,\ldots,n+1\\ \nu=0,1,\ldots,n+1-\mu\\ \mu=\nu\neq 0\end{pmatrix}\\
&\frac{\partial f}{\partial F_{\mu,n+1-\mu}} + 2\frac{\partial f}{\partial E_{\mu-1,n+2-\mu}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial F_{n+1-\mu,\mu}} + 2\frac{\partial f}{\partial G_{n+2-\mu,\mu-1}} = 0\ ^{1}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (\mu=0,1,\ldots,n+2)
\end{aligned}\right.$$

[1] Diese Gleichungen sind die etwas anders geschriebenen Gleichungen (16′).

schreiben. Man muss hier beachten, dass alle Glieder, bei welchen ein Index von E, F oder G negativ ausfällt, gleich Null zu nehmen sind.

12. Nach dem Satze IV kommt die Frage, ob die Gleichungen der erweiterten Gaussischen Gruppe von bestimmter Ordnung alle von einander unabhängig sind oder nicht, auf die Untersuchung der Gleichungen zurück, welche die Differentialinvarianten der niedrigsten Ordnungen definieren. Hat man bewiesen, dass alle Gleichungen einer bestimmten, etwa der p^{ten} erweiterten Gruppe von einander unabhängig sind, so gilt das auch für jede Ordnung, welche grösser als p ist.

Aus den Formeln (14), (α) und (β) erhält man für $n = 0$:

$$(\alpha_0) \qquad \begin{cases} \mathfrak{G}_{01} f = E\dfrac{\partial f}{\partial F} + 2F\dfrac{\partial f}{\partial G} = 0, \\[2ex] \bar{\mathfrak{G}}_{10} f = G\dfrac{\partial f}{\partial F} + 2F\dfrac{\partial f}{\partial E} = 0, \\[2ex] \mathfrak{G}_{10} f = 2E\dfrac{\partial f}{\partial E} + F\dfrac{\partial f}{\partial F} = 0, \\[2ex] \bar{\mathfrak{G}}_{01} f = 2G\dfrac{\partial f}{\partial G} + F\dfrac{\partial f}{\partial F} = 0. \end{cases}$$

Für die Grössen χ_{01}, $\bar{\chi}_{10}$, χ_{10}, $\bar{\chi}_{01}$, welche die Identität:

$$(\beta_0) \qquad \chi_{01}\mathfrak{G}_{01} f + \bar{\chi}_{10}\bar{\mathfrak{G}}_{10} f + \chi_{10}\mathfrak{G}_{10} f + \bar{\chi}_{01}\bar{\mathfrak{G}}_{01} f = 0$$

befriedigen sollen, erhalten wir drei lineare homogene Gleichungen:

$$(\gamma_0) \qquad \begin{cases} F\bar{\chi}_{10} + E\chi_{10} = 0, \qquad E\chi_{10} + G\bar{\chi}_{10} + F\chi_{10} + F\bar{\chi}_{01} = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad F\chi_{01} + G\bar{\chi}_{01} = 0, \end{cases}$$

aus welchen folgt:

$$(\delta_0) \qquad \bar{\chi}_{10} = -\frac{E}{G}\chi_{01}, \qquad \chi_{10} = \frac{F}{G}\chi_{01}, \qquad \bar{\chi}_{01} = -\frac{F}{G}\chi_{01}.$$

Es existiert demnach eine, aber auch nur eine Identität (β_0). Es ergiebt sich also, dass *die Gleichungen* (α_0) *drei unabhängige enthalten.*

Benutzt man ferner die Gleichungen (15), so erhält man:

$$(\alpha_1)\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{G}_{01}^{(1)}f &= \mathfrak{G}_{01}f + E_{10}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + (F_{10}+E_{01})\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + (2F_{01}+G_{10})\frac{\partial f}{\partial G_{01}}\\
&\quad + E_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} = 0,\\
\bar{\mathfrak{G}}_{10}^{(1)}f &= \bar{\mathfrak{G}}_{10}f + G_{01}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + (F_{01}+G_{10})\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + (2F_{10}+E_{01})\frac{\partial f}{\partial E_{10}}\\
&\quad + G_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} = 0,\\
\mathfrak{G}_{10}^{(1)}f &= \mathfrak{G}_{10}f + 2E_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 3E_{10}\frac{\partial f}{\partial E_{10}} + 2F_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}}\\
&\quad + G_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} = 0,\\
\bar{\mathfrak{G}}_{01}^{(1)}f &= \bar{\mathfrak{G}}_{01}f + 2G_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 3G_{01}\frac{\partial f}{\partial G_{01}} + 2F_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}}\\
&\quad + E_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} = 0,\\
\mathfrak{G}_{02}^{(1)}f &= E\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F\frac{\partial f}{\partial G_{01}} = 0,\\
\bar{\mathfrak{G}}_{20}^{(1)}f &= G\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F\frac{\partial f}{\partial E_{10}} = 0,\\
\mathfrak{G}_{11}^{(1)}f &= 2E\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + E\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F\frac{\partial f}{\partial G_{10}} = 0,\\
\bar{\mathfrak{G}}_{11}^{(1)}f &= 2G\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + G\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F\frac{\partial f}{\partial E_{01}} = 0,\\
\mathfrak{G}_{20}^{(1)}f &= 2E\frac{\partial f}{\partial E_{10}} + F\frac{\partial f}{\partial F_{10}} = 0,\\
\bar{\mathfrak{G}}_{02}^{(1)}f &= 2G\frac{\partial f}{\partial G_{01}} + F\frac{\partial f}{\partial F_{01}} = 0.
\end{aligned}\right.$$

Wir versuchen die Grössen so zu bestimmen, dass die Identität:

$$(\beta_1)\qquad \chi_{01}\mathfrak{G}_{01}^{(1)}f + \ldots + \bar{\chi}_{01}\bar{\mathfrak{G}}_{10}^{(1)}f + \chi_{02}\mathfrak{G}_{02}^{(1)}f + \ldots + \bar{\chi}_{02}\bar{\mathfrak{G}}_{02}^{(1)}f = 0$$

besteht. Man sieht ohne weiteres, dass $\chi_{01}, \ldots, \bar\chi_{01}$ die Werte (δ_0) haben müssen. Für die anderen χ erhalten wir folgende Gleichungen:

$$(\gamma_1)\quad\left\{\begin{aligned}
2E\chi_{11} + 2F\bar\chi_{11} + \frac{\chi_{01}}{G}(GE_{10} - 2EF_{01} + FE_{01}) &= 0,\\
E\chi_{02} + F\chi_{11} + G\bar\chi_{11} + F\bar\chi_{02} + \frac{\chi_{01}}{G}[(F_{10} + E_{01})G - EG_{01} - FF_{01}] &= 0,\\
2F\chi_{02} + 2G\bar\chi_{02} + \frac{\chi_{01}}{G}[(2F_{01} + G_{10})G - 3G_{01}F] &= 0,\\
2F\chi_{11} + 2G\bar\chi_{11} - \frac{\chi_{01}}{G}(EG_{01} - 2GF_{10} + FG_{10}) &= 0,\\
G\bar\chi_{20} + E\chi_{11} + F\bar\chi_{11} + F\chi_{20} - \frac{\chi_{01}}{G}[(F_{01} + G_{10})E - GE_{10} - FF_{10}] &= 0,\\
2E\chi_{20} + 2F\bar\chi_{20} - \frac{\chi_{01}}{G}[(2F_{10} + E_{01})E - 3E_{10}F] &= 0.
\end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$(\delta_1)\quad\left\{\begin{aligned}
\chi_{02} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)}\{F(4GF_{01} - 3FG_{01}) - G(2GE_{01} - EG_{01})\},\\
\bar\chi_{20} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)}\{E(2EG_{10} - GE_{10}) - F(4EF_{10} - 3FE_{10})\},\\
\chi_{11} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)}\{- F(EG_{01} - 2GF_{10} + FG_{10})\\
&\qquad - G(GE_{10} - 2EF_{01} + FE_{01})\},\\
\bar\chi_{11} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)}\{E(EG_{01} - 2GF_{10} + FG_{10})\\
&\qquad + F(GE_{10} - 2EF_{01} + FE_{01})\},\\
\chi_{20} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)}\{2(EG + F^2)F_{10} + (EG - F^2)E_{01}\\
&\qquad - 2F(GE_{10} + EG_{10})\},\\
\bar\chi_{02} &= \frac{\chi_{01}}{2G(EG - F^2)}\{2F(EG_{01} + GE_{01}) - 2(EG + F^2)F_{01}\\
&\qquad - (EG - F^2)G_{10}\}.
\end{aligned}\right.$$

Wir schliessen hieraus, dass es eine und nur eine Identität (β_1) giebt und dass also *die Gleichungen* (α_1) 9 *unabhängige enthalten.*

Bilden wir jetzt die Gleichungen der zweiten erweiterten Gaussischen Gruppe nach dem Schema (17), so erhalten wir:

$$(\alpha_2)\begin{cases}
\mathfrak{G}_{01}^{(1)}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{10}^{(1)}f = 0,\\
\mathfrak{G}_{10}^{(1)}f-(E_{02}-2F_{11}+G_{20})\dfrac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{01}^{(1)}f-(G_{20}-2F_{11}+E_{02})\dfrac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0,\\
\mathfrak{G}_{02}^{(1)}f+\frac{1}{2}E_{10}\dfrac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{20}^{(1)}f+\frac{1}{2}G_{01}\dfrac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0,\\
\mathfrak{G}_{11}^{(1)}f-E_{01}\dfrac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{11}^{(1)}f-G_{10}\dfrac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0,\\
\mathfrak{G}_{20}^{(1)}f+\left(F_{01}-\frac{1}{2}G_{10}\right)\dfrac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0, & \bar{\mathfrak{G}}_{02}^{(1)}f+\left(F_{10}-\frac{1}{2}E_{01}\right)\dfrac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0,\\
\dfrac{\partial f}{\partial F_{02}} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial F_{20}} = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial F_{11}}+2\dfrac{\partial f}{\partial E_{02}} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial F_{11}}+2\dfrac{\partial f}{\partial G_{20}} = 0,\\
\dfrac{\partial f}{\partial E_{11}} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial G_{11}} = 0, & \dfrac{\partial f}{\partial E_{20}} = 0, \quad \dfrac{\partial f}{\partial G_{02}} = 0.
\end{cases}$$

Multipliciert man die linken Seiten dieser Gleichungen mit gewissen unbekannten Multiplicatoren, addiert die erhaltenen Ausdrücke und setzt die Summe gleich Null, so sieht man ohne weiteres, dass alle Multiplicatoren der acht letzten Gleichungen gleich Null sein müssen. Übrigens zerfällt die aufgestellte Identität in die Identität (β_1) und in die Identität:

$$-(E_{02}-2F_{11}+G_{20})\chi_{10}-(G_{20}-2F_{11}+E_{02})\bar{\chi}_{01}+\frac{1}{2}E_{10}\chi_{02}$$

$$+\frac{1}{2}G_{01}\bar{\chi}_{20}-E_{01}\chi_{11}-G_{10}\bar{\chi}_{11}+\left(F_{01}-\frac{1}{2}G_{10}\right)\chi_{20}+\left(F_{10}-\frac{1}{2}E_{01}\right)\bar{\chi}_{02} = 0.$$

Sind die Gleichungen (α_2) nicht alle von einander unabhängig, so müssen die Werte (ϑ_0) und (ϑ_1) diese Identität befriedigen. Und es lässt sich in der That leicht verificieren, dass dies der Fall ist. Demnach *enthalten die Gleichungen* (α_2) *nur* 17 *unabhängige.* Hätten wir also andererseits die Gleichungen (α_2) in der Form:

$$(\alpha_2') \qquad \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(2)}f = 0, \qquad \bar{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(2)}f = 0 \qquad \begin{pmatrix}\mu=0,1,2,3\\ \nu=0,1,\dots,3-\mu\end{pmatrix}$$

genommen, so wäre die Identität:

$$(\beta_2) \qquad \chi_{01}\mathfrak{G}^{(2)}_{01}f + \dots + \bar{\chi}_{02}\bar{\mathfrak{G}}^{(2)}_{02}f + \chi_{03}\mathfrak{G}^{(2)}_{03}f + \dots + \bar{\chi}_{03}\bar{\mathfrak{G}}^{(2)}_{03}f = 0$$

durch die Werte (δ_0), (δ_1) und

$$(\delta_2) \qquad \chi_{03} = a_{03}\chi_{01}, \qquad \bar{\chi}_{30} = \bar{a}_{30}\chi_{01}, \qquad \chi_{12} = a_{12}\chi_{01}, \quad \dots, \quad \bar{\chi}_{03} = \bar{a}_{03}\chi_{01}$$

befriedigt worden, wobei wir die Coefficienten a und $\bar{a}$, wie aus dem Folgenden zu sehen ist, nicht aufzustellen brauchen.

Jetzt werden wir die Gleichungen der 3ten erweiterten Gaussischen Gruppe nach (17) aufstellen. Es ergiebt sich:

$$\mathfrak{G}^{(2)}_{01}f - \frac{1}{2}(E_{12} - 2F_{21} + G_{30})\frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0,$$

$$\bar{\mathfrak{G}}^{(2)}_{10}f - \frac{1}{2}(G_{21} - 2F_{12} + E_{03})\frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0,$$

$$\mathfrak{G}^{(2)}_{10}f - (E_{03} - 2F_{12} + G_{21})\frac{\partial f}{\partial F_{12}} - \frac{3}{2}(E_{12} - 2F_{21} + G_{30})\frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0,$$

$$\bar{\mathfrak{G}}^{(2)}_{01}f - (G_{30} - 2F_{21} + E_{12})\frac{\partial f}{\partial F_{21}} - \frac{3}{2}(G_{21} - 2F_{12} + E_{03})\frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0,$$

$$\mathfrak{G}^{(2)}_{02}f + \frac{1}{2}E_{11}\frac{\partial f}{\partial F_{12}} + \frac{1}{2}E_{20}\frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0, \qquad \bar{\mathfrak{G}}^{(2)}_{20}f + \frac{1}{2}G_{11}\frac{\partial f}{\partial F_{21}} + \frac{1}{2}G_{02}\frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0,$$

$$\mathfrak{G}^{(2)}_{11}f - 2\left(E_{02} - F_{11} + \frac{1}{2}G_{20}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{12}} - E_{11}\frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0,$$

$$\bar{\mathfrak{G}}^{(2)}_{11}f - 2\left(G_{20} - F_{11} + \frac{1}{2}E_{02}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{21}} - G_{11}\frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0,$$

$$\mathfrak{G}^{(2)}_{20}f + \left(F_{02} - \frac{1}{2}G_{11}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{12}} - \left(E_{02} - 3F_{11} + \frac{3}{2}G_{20}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0,$$

$$\bar{\mathfrak{G}}^{(2)}_{02}f + \left(F_{20} - \frac{1}{2}E_{11}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{21}} - \left(G_{20} - 3F_{11} + \frac{3}{2}E_{02}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0,$$

$$\mathfrak{G}^{(2)}_{03}f + \frac{1}{2}E_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0, \qquad \bar{\mathfrak{G}}^{(2)}_{30}f + \frac{1}{2}G_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0,$$

$$\mathfrak{G}^{(2)}_{12}f - E_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{12}} + \frac{1}{2}E_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0, \qquad \bar{\mathfrak{G}}^{(2)}_{21}f - G_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{21}} + \frac{1}{2}G_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_{21}^{(2)}f + \left(F_{01} - \frac{1}{2}G_{10}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{12}} - E_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_{12}^{(2)}f + \left(F_{10} - \frac{1}{2}E_{01}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{21}} - G_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0,$$

$$\mathfrak{S}_{30}^{(2)}f + \left(F_{01} - \frac{1}{2}G_{10}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{21}} = 0, \qquad \mathfrak{S}_{03}^{(2)}f + \left(F_{10} - \frac{1}{2}E_{01}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{12}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial F_{03}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial F_{30}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial F_{12}} + 2\frac{\partial f}{\partial E_{03}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial F_{21}} + 2\frac{\partial f}{\partial G_{30}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial F_{21}} + 2\frac{\partial f}{\partial E_{12}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial F_{12}} + 2\frac{\partial f}{\partial G_{21}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial E_{21}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial G_{12}} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial E_{30}} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial G_{03}} = 0.$$

Multipliciert man die linken Seiten dieser Gleichungen mit gewissen unbestimmten Multiplicatoren, addiert die Produkte und setzt die Summe gleich Null, so sieht man sogleich, dass alle Multiplicatoren der letzten 10 Gleichungen gleich Null zu setzen sind. Und ausserdem zerfällt die erhaltene Identität in die Identität (β_2) und in die beiden folgenden:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(E_{12} - 2F_{21} + G_{30})\chi_{01} - (E_{03} - 2F_{12} + G_{21})\chi_{10} - \frac{3}{2}(G_{21} - 2F_{12} + E_{03})\bar{\chi}_{01} \\
&\quad + \frac{1}{2}E_{11}\chi_{02} + \frac{1}{2}G_{02}\bar{\chi}_{20} - 2\left(E_{02} - F_{11} + \frac{1}{2}G_{20}\right)\chi_{11} - G_{11}\bar{\chi}_{11} \\
&\quad + \left(F_{02} - \frac{1}{2}G_{11}\right)\chi_{20} - \left(G_{20} - 3F_{11} + \frac{3}{2}E_{02}\right)\bar{\chi}_{02} + \frac{1}{2}E_{10}\chi_{03} - E_{01}\chi_{12} \\
&\quad + \frac{1}{2}G_{01}\bar{\chi}_{21} + \left(F_{01} - \frac{1}{2}G_{10}\right)\chi_{21} - G_{10}\bar{\chi}_{12} + \left(F_{10} - \frac{1}{2}E_{01}\right)\bar{\chi}_{03} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(G_{21} - 2F_{12} + E_{03})\bar{\chi}_{10} - (G_{30} - 2F_{21} + E_{12})\bar{\chi}_{01} - \frac{3}{2}(E_{12} - 2F_{21} + G_{30})\chi_{10} \\
&\quad + \frac{1}{2}G_{11}\bar{\chi}_{20} + \frac{1}{2}E_{20}\chi_{02} - 2\left(G_{20} - F_{11} + \frac{1}{2}E_{02}\right)\bar{\chi}_{11} - E_{11}\chi_{11} \\
&\quad + \left(F_{20} - \frac{1}{2}E_{11}\right)\bar{\chi}_{02} - \left(E_{02} - 3F_{11} + \frac{3}{2}G_{20}\right)\chi_{20} + \frac{1}{2}G_{01}\bar{\chi}_{30} - G_{10}\bar{\chi}_{21} \\
&\quad + \frac{1}{2}E_{10}\chi_{12} + \left(F_{10} - \frac{1}{2}E_{01}\right)\bar{\chi}_{12} - E_{01}\chi_{21} + \left(F_{01} - \frac{1}{2}G_{10}\right)\chi_{30} = 0.
\end{aligned}$$

Man sieht aber leicht, dass die Identität (β_2) und die beiden letzten Identitäten nur dann befriedigt sein können, wenn man alle χ gleich Null setzt. In der That: weil alle χ von den Differentialquotienten 3^{ter} Ordnung der E, F, G unabhängig sind, so müssen in den beiden letzten Identitäten die Coefficienten der genannten Differentialquotienten 3^{ter} Ordnung von selbst verschwinden. Es muss also insbesondere der Coefficient von E_{12} in der ersten Identität verschwinden, d. h. es muss $\chi_{01} = 0$ sein; es müssen also auch alle χ gleich 0 werden. Daraus folgt, dass *die Gleichungen* der 3^{ten} *erweiterten Gaussischen Gruppe alle von einander unabhängig sind.*

13. Nach dem Theorem II bilden die infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu\nu} f, \quad \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\nu\mu} f \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, n+1 \\ \nu = 0, 1, \ldots, n+1-\mu \\ \mu = \nu \neq 0 \end{pmatrix}$$

eine endliche continuierliche Transformationsgruppe, denn nach dem Theorem I ist jede Erweiterung einer unendlichen continuierlichen Transformationsgruppe ebenfalls eine unendliche continuierliche Transformationsgruppe. Also bilden die Gleichungen (14), (α) und (β) für jeden Wert von n ein vollständiges System.

Für $n = 0$ erhalten wir die 4 Gleichungen (α_0) welche drei unabhängige Veränderliche enthalten. Von diesen Gleichungen sind 3 unabhängig, woraus folgt, dass sie keine Lösung zulassen. Nennt man die Lösungen von (14), welche Differentialquotienten von E, F, G bis zur n^{ten} Ordnung incl. enthalten, *Gaussische Biegungsinvarianten* n^{ter} *Ordnung,* so sieht man, dass es keine Gaussische Biegungsinvariante 0^{ter} Ordnung giebt.

Für $n = 1$ ergeben sich die Gleichungen (α_1) und unter ihnen sind 9 unabhängig; die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen ist ebenfalls 9, es giebt also keine Gaussische Biegungsinvariante 1^{ter} Ordnung.

Für $n = 2$ haben wir unter (α_2) 17 unabhängige Gleichungen bei 18 unabhängigen Veränderlichen. Es existiert also eine Gaussische Biegungsinvariante 2^{ter} Ordnung.

Für $n = 3$ ist die Anzahl der Gleichungen gleich 28; sie sind alle unabhängig und die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen ist gleich 30. Wir haben also 2 unabhängige Lösungen, deren eine die Gaussische

Biegungsinvariante 2^{ter} Ordnung ist; die zweite ist die einzige Gaussische Biegungsinvariante 3^{ter} Ordnung.

Nach dem Satze IV sind mit Bezug auf das für $n = 3$ erhaltene Resultat *die Gleichungen jeder n^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe für $n > 3$ alle von einander unabhängig.* Die Anzahl dieser Gleichungen ist gleich der Anzahl aller Differentialquotienten von $\xi(xy)$ und $\eta(xy)$ nach x, y bis zur $(n + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung incl. Sie ist also gleich:

$$2[2 + 3 + \ldots + (n + 2)] = (n + 1)(n + 4);$$

weil aber die Anzahl aller Differentialquotienten von E, F, G bis zur n^{ten} Ordnung incl. und der Functionen selber, welche alle hier die Rolle der unabhängigen Veränderlichen spielen, gleich

$$3[1 + 2 + \ldots + (n + 1)] = \frac{3}{2}(n + 1)(n + 2)$$

ist, so ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen der Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe gleich:

$$\frac{3}{2}(n + 1)(n + 2) - (n + 1)(n + 4) = \frac{1}{2}(n - 2)(n + 1).$$

Die Anzahl der Lösungen für die $(n - 1)^{\text{te}}$ erweiterte Gaussische Gruppe ist dementsprechend gleich $\frac{1}{2}(n - 3)n$, also ist die Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung gleich:

$$\frac{1}{2}(n - 2)(n + 1) - \frac{1}{2}(n - 3)n = n - 1.$$

Fassen wir alle diese Resultate zusammen, so ergiebt sich folgendes Theorem:

Theorem III. *Die Gaussischen Biegungsinvarianten werden als Lösungen der vollständigen Systeme:*

$$\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)} f = \sum_{\mu=1}^{n}{}'_i \sum_{\nu=1}^{n-i}{}'_k \Big\{ (2i_{\mu-1} + i_\mu) k_\nu E_{i-\mu+1,k-\nu} \frac{\partial f}{\partial E_{ik}}$$

$$+ [(i+1)_\mu k_\nu F_{i-\mu+1,k-\nu} + i_\mu k_{\nu-1} E_{i-\mu,k-\nu+1}] \frac{\partial f}{\partial F_{ik}}$$

$$+ i_\mu (2k_{\nu-1} F_{i-\mu,k-\nu+1} + k_\nu G_{i-\mu+1,k-\nu}) \frac{\partial f}{\partial G_{ik}} \Big\} = 0,$$

$$\overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n)} f = \sum_{\mu=1}^{n}{}'_i \sum_{\nu=1}^{n-i}{}'_k \Big\{ (2i_{\mu-1} + i_\mu) k_\nu G_{k-\nu,i-\mu+1} \frac{\partial f}{\partial G_{ki}}$$

$$+ [(i+1)_\mu k_\nu F_{k-\nu,i-\mu+1} + i_\mu k_{\nu-1} G_{k-\nu+1,i-\mu}] \frac{\partial f}{\partial F_{ki}}$$

$$+ i_\mu (2k_{\nu-1} F_{k-\nu+1,i-\mu} + k_\nu E_{k-\nu,i-\mu+1}) \frac{\partial f}{\partial E_{ki}} \Big\} = 0 \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, n+1 \\ \nu = 0, 1, \ldots, n+1-\mu \\ \mu = \nu \neq 0 \end{pmatrix}$$

definiert. Es giebt keine Gaussischen Biegungsinvarianten 0^ter^ *und* 1^ter^ *Ordnung. Die Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten* 2^ter^ *Ordnung ist gleich* 1, 3^ter^ *Ordnung gleich* 1 *und allgemein* n^{ter} *Ordnung, wo* $n > 3$ *ist, gleich* $n - 1$.

§ IV. *Anzahl der übrigen Biegungsinvarianten.*

14. Nach den Formeln (10) und (11) sind die Gleichungen der n^{ten} *erweiterten Beltramischen Gruppe:*

$$\mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f = \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f + \sum_{1}^{m}{}_s \sum_{\mu}^{n}{}_i \sum_{\nu}^{n-i}{}_k\, i_\mu k_\nu \varphi^s_{i-\mu+1,k-\nu} \frac{\partial f}{\partial \varphi^s_{ik}} = 0,$$

$$\overline{\mathfrak{B}}_{\mu\nu}^{(n)} f = \overline{\mathfrak{G}}_{\mu\nu}^{(n-1)} f + \sum_{1}^{m}{}_s \sum_{\mu}^{n}{}_i \sum_{\nu}^{n-i}{}_k\, i_\mu k_\nu \varphi^s_{i-\mu,k-\nu+1} \frac{\partial f}{\partial \varphi^s_{ik}} = 0, \quad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, \ldots, n-\mu \\ \mu = \nu \neq 0 \end{pmatrix}.$$

wo die unteren Grenzen der Summation nach i und k gleich μ und ν genommen sind, weil die zu kleineren Werten von i und k gehörigen Glieder augenscheinlich immer verschwinden. Den Gleichungen $\overline{\mathfrak{B}}_{\mu\nu}^{(n)} f = 0$ kann man nach denselben Betrachtungen, wie sie in N° 9 angestellt wurden, eine andere Form geben, so dass sich als Gleichungen der n^{ten} erweiterten Beltramischen Gruppe die folgenden ergeben:

$$
(18)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f = \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f + \sum_{1}^{m}{}_s \sum_{\mu}^{n}{}_i \sum_{\nu}^{n-i}{}_k\, i_\mu k_\nu \varphi^{s}_{i-\mu+1,k-\nu} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi^{s}_{ik}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f = \overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f + \sum_{1}^{m}{}_s \sum_{\mu}^{n}{}_i \sum_{\nu}^{n-i}{}_k\, i_\mu k_\nu \varphi^{s}_{k-\nu,i-\mu+1} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi^{s}_{ki}} = 0. \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \mu=0,1,\ldots,n \\ \nu=0,1,\ldots,n-\mu \\ \mu=\nu\neq 0 \end{pmatrix}
$$

Demnach können wir analog dem Satze III den folgenden Satz aufstellen:

Satz V: *Hat man alle Gleichungen $\mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f = 0$ aufgestellt, so kann man die Gleichungen $\overline{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f = 0$ ohne weiteres angeben. Aus jeder Gleichung $\mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f = 0$ ergiebt sich nämlich die entsprechende Gleichung $\overline{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f = 0$ durch gleichzeitige Vertauschung einerseits der Buchstaben E und G, andererseits der Indices von E, F, G, φ^1, φ^2, ..., φ^m.*

Benutzt man ferner die Überlegungen im N° 10, welche hier wegen der Allgemeinheit der Bemerkungen 1 und 2 angewendet werden können, so kann man die Gleichungen der $(n+1)^{\text{ten}}$ erweiterten Beltramischen Gruppe folgendermassen schreiben:

$$
(19)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n+1)} f = \mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f + \left(\mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n)} f - \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f\right) \\ \qquad + \sum_{1}^{m}{}_s \sum_{\mu}^{n+1}{}_i\, i_\mu (n+1-i)_\nu \varphi^{s}_{i-\mu+1,n+1-i-\nu} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi^{s}_{i,n+1-i}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n+1)} f = \overline{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f + \left(\overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n)} f - \overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f\right) \\ \qquad + \sum_{1}^{m}{}_s \sum_{\mu}^{n+1}{}_i\, i_\mu (n+1-i)_\nu \varphi^{s}_{n+1-i-\nu,i-\mu+1} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi^{s}_{n+1-i,i}} = 0, \quad \begin{pmatrix} \mu=0,1,\ldots,n \\ \nu=0,1,\ldots,n-\mu \\ \mu=\nu\neq 0 \end{pmatrix} \\ (a) \begin{cases} \mathfrak{B}_{\mu,n+1-\mu}^{(n+1)} f = \mathfrak{G}_{\mu,n+1-\mu}^{(n)} f \\ \qquad + \sum_{1}^{m}{}_s \sum_{\mu}^{n+1}{}_i\, i_\mu (n+1-i)_{n+1-\mu} \varphi^{s}_{i-\mu+1,\mu-i} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi^{s}_{i,n+1-i}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{B}}_{n+1-\mu,\mu}^{(n+1)} f = \overline{\mathfrak{G}}_{n+1-\mu,\mu}^{(n)} f \\ \qquad + \sum_{1}^{m}{}_s \sum_{\mu}^{n+1}{}_i\, i_\mu (n+1-i)_{n+1-\mu} \varphi^{s}_{\mu-i,i-\mu+1} \dfrac{\partial f}{\partial \varphi^{s}_{n+1-i,i}} = 0. \end{cases} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\mu=0,1,\ldots,n+1) \end{cases}
$$

Man sieht aber unmittelbar, dass die Gleichungen:

$$
\mathfrak{B}_{\mu,n+1-\mu}^{(n+1)} f = 0, \qquad \overline{\mathfrak{B}}_{n+1-\mu,\mu}^{(n+1)} f = 0 \qquad (\mu=0,1,\ldots,n+1)
$$

auf die Form:

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{B}^{(n+1)}_{\mu,n+1-\mu}f = \mathfrak{G}^{(n)}_{\mu,n+1-\mu}f + \sum_1^m {}_s\varphi^s_{10}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi^s_{\mu,n+1-\mu}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{B}}^{(n+1)}_{n+1-\mu,\mu}f = \overline{\mathfrak{G}}^{(n)}_{n+1-\mu,\mu}f + \sum_1^m {}_s\varphi^s_{01}\dfrac{\partial f}{\partial\varphi^s_{n+1-\mu,\mu}} = 0, \end{cases}$$

gebracht werden können.

15. Die Formeln (7) und (12) erlauben uns die Gleichungen der *Mindingschen n^{ten} erweiterten Gruppe* ohne weiteres aufzustellen:

$$(21)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}^{(n)}_{\mu\nu}f = \mathfrak{G}^{(n-1)}_{\mu\nu}f - \sum_1^n {}_l g^l_{\mu\nu}\dfrac{\partial f}{\partial y^{(l)}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{M}}^{(n)}_{\nu\mu}f = \overline{\mathfrak{G}}^{(n-1)}_{\nu\mu}f - \sum_1^n {}_l h^l_{\nu\mu}\dfrac{\partial f}{\partial y^{(l)}} = 0. \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \mu=0,1,\dots,n \\ \nu=0,1,\dots,n-\mu \\ \mu=\nu\neq 0 \end{pmatrix}$$

Hier kann man aber einen zu den Sätzen III und V analogen Satz nicht aufstellen. Hat man die Gleichungen der n^{ten} erweiterten Mindingschen Gruppe aufgestellt, so ergeben sich die Gleichungen der $(n+1)^{\text{ten}}$ erweiterten Mindingschen Gruppe folgendermassen:

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{M}^{(n+1)}_{\mu\nu}f = \mathfrak{M}^{(n)}_{\mu\nu}f + (\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu\nu}f - \mathfrak{G}^{(n-1)}_{\mu\nu}f) - g^{n+1}_{\mu\nu}\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{M}}^{(n+1)}_{\nu\mu}f = \overline{\mathfrak{M}}^{(n)}_{\nu\mu}f + (\overline{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\nu\mu}f - \overline{\mathfrak{G}}^{(n-1)}_{\nu\mu}f) - h^{n+1}_{\nu\mu}\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \quad \begin{pmatrix} \mu=0,1,\dots,n \\ \nu=0,1,\dots,n-\mu \\ \mu=\nu\neq 0 \end{pmatrix} \\ (a)\begin{cases} \mathfrak{M}^{(n+1)}_{\mu,n+1-\mu}f = \mathfrak{G}^{(n)}_{\mu,n+1-\mu}f - g^{n+1}_{\mu,n+1-\mu}\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{M}}^{(n+1)}_{n+1-\mu,\mu}f = \overline{\mathfrak{G}}^{(n)}_{n+1-\mu,\mu}f - h^{n+1}_{n+1-\mu,\mu}\dfrac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0. \qquad (\mu=0,1,\dots,n+1) \end{cases} \end{cases}$$

16. Geht man endlich zu der *allgemeinen erweiterten n^{ten} Gruppe* (13) über, so ergeben sich folgende Gleichungen, welche ihre Differentialinvarianten definieren:

$$
(23)\begin{cases}
\mathfrak{A}^{(n)}_{\mu\nu} f = \mathfrak{G}^{(n-1)}_{\mu\nu} f + \sum_{1}^{m}{}_{s} \sum_{\mu}^{n}{}_{i} \sum_{\nu}^{n-i}{}_{k}\, i_\mu k_\nu \varphi^{s}_{i-\mu+1,k-\nu} \frac{\partial f}{\partial \varphi^{s}_{ik}} - \sum_{1}^{n}{}_{l}\, g^{l}_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial y^{(l)}} = 0, \\
\overline{\mathfrak{A}}^{(n)}_{\nu\mu} f = \overline{\mathfrak{G}}^{(n-1)}_{\nu\mu} f + \sum_{1}^{m}{}_{s} \sum_{\mu}^{n}{}_{i} \sum_{\nu}^{n-i}{}_{k}\, i_\mu k_\nu \varphi^{s}_{k-\nu,i-\mu+1} \frac{\partial f}{\partial \varphi^{s}_{ki}} - \sum_{1}^{n}{}_{l}\, h^{l}_{\nu\mu} \frac{\partial f}{\partial y^{(l)}} = 0.
\end{cases}
\qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, \ldots, n-\mu \\ \mu = \nu \neq 0 \end{pmatrix}
$$

Sind die Gleichungen der Allgemeinen n^{ten} erweiterten Gruppe aufgestellt, so ergeben sich die Gleichungen der $(n+1)^{\text{ten}}$ Gruppe folgendermassen:

$$
(24)\begin{cases}
\mathfrak{A}^{(n+1)}_{\mu\nu} f = \mathfrak{A}^{(n)}_{\mu\nu} f + (\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu\nu} f - \mathfrak{G}^{(n-1)}_{\mu\nu} f) \\
\quad + \sum_{1}^{m}{}_{s} \sum_{\mu}^{n+1}{}_{i}\, i_\mu (n+1-i)_\nu \varphi^{s}_{i-\mu+1,n+1-i-\nu} \frac{\partial f}{\partial \varphi^{s}_{i,n+1-i}} - g^{n+1}_{\mu\nu} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \\
\overline{\mathfrak{A}}^{(n+1)}_{\nu\mu} f = \overline{\mathfrak{A}}^{(n)}_{\nu\mu} f + (\overline{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\nu\mu} f - \overline{\mathfrak{G}}^{(n-1)}_{\nu\mu} f) \\
\quad + \sum_{1}^{m}{}_{s} \sum_{\mu}^{n+1}{}_{i}\, i_\mu (n+1-i)_\nu \varphi^{s}_{n+1-i-\nu,i-\mu+1} \frac{\partial f}{\partial \varphi^{s}_{n+1-i,i}} - h^{n+1}_{\nu\mu} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \\
\qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, \ldots, n-\mu \\ \mu = \nu \neq 0 \end{pmatrix} \\
(a)\begin{cases}
\mathfrak{A}^{(n+1)}_{\mu,n+1-\mu} f = \mathfrak{G}^{(n)}_{\mu,n+1-\mu} f + \sum_{1}^{m}{}_{s}\, \varphi^{s}_{10} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{\mu,n+1-\mu}} - g^{n+1}_{\mu,n+1-\mu} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0, \\
\overline{\mathfrak{A}}^{(n+1)}_{n+1-\mu,\mu} f = \overline{\mathfrak{G}}^{(n)}_{n+1-\mu,\mu} f + \sum_{1}^{m}{}_{s}\, \varphi^{s}_{01} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{n+1-\mu,\mu}} - h^{n+1}_{n+1-\mu,\mu} \frac{\partial f}{\partial y^{(n+1)}} = 0.
\end{cases} \\
\qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n+1)
\end{cases}
$$

17. In N° 11 haben wir bewiesen, dass die Gleichungen:

$$
\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu,n+1-\mu} f = 0, \qquad \overline{\mathfrak{G}}^{(n)}_{n+1-\mu,\mu} f = 0 \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n+1)
$$

alle von einander unabhängig sind. Nach dem Satze I sind also alle Gleichungen (19 *a*), alle Gleichungen (22 *a*) und endlich alle (24 *a*) von einander unabhängig. Daraus folgt also nach dem Satze II, dass alle Gleichungen (19) von einander unabhängig sind, sobald alle Gleichungen (18) von einander unabhängig sind, dass alle Gleichungen (22) von einander unabhängig sind, sobald alle (21) von einander unabhängig sind und endlich, dass alle (24) von einander unabhängig sind, sobald alle (23) von einander unabhängig sind. Demnach können wir folgenden Satz aufstellen:

Satz VI: *Sind die Gleichungen der n^{ten} erweiterten Beltramischen,* *Mindingschen oder allgemeinen Gruppe alle von einander unabhängig, so sind auch die Gleichungen der $(n+1)^{\text{ten}}$ erweiterten resp. Beltramischen, Mindingschen oder allgemeinen Gruppe alle von einander unabhängig.*

18. Nimmt man in den Gleichungen der Beltramischen erweiterten Gruppe $m = 1$ an und berechnet die Gleichungen der ersten erweiterten Beltramischen Gruppe, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{B}_{01}^{(1)}f = E\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial G} + \varphi_{10}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} = 0,$$

$$\bar{\mathfrak{B}}_{10}^{(1)}f = G\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial E} + \varphi_{01}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} = 0,$$

$$\mathfrak{B}_{10}^{(1)}f = 2E\frac{\partial f}{\partial E} + F\frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{10}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} = 0,$$

$$\bar{\mathfrak{B}}_{01}^{(1)}f = 2G\frac{\partial f}{\partial G} + F\frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{01}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} = 0;$$

sind diese Gleichungen nicht alle von einander unabhängig, so muss die Identität:

$$\chi_{01}\mathfrak{B}_{01}^{(1)}f + \bar{\chi}_{10}\bar{\mathfrak{B}}_{10}^{(1)}f + \chi_{10}\mathfrak{B}_{10}^{(1)}f + \bar{\chi}_{01}\bar{\mathfrak{B}}_{01}^{(1)}f = 0$$

durch die Werte (δ_0) (N° 12) befriedigt werden, ohne dass χ_{01} identisch verschwindet. Es muss also gelten:

$$(\varphi_{10}G - \varphi_{01}F)\chi_{01} = 0, \qquad (\varphi_{01}E - \varphi_{10}F)\chi_{01} = 0;$$

daraus folgt aber, dass $\chi_{01} = 0$ sein muss, dass also obige 4 Gleichungen von einander unabhängig sind.

Nach dem Satze I sind die Gleichungen der ersten erweiterten Beltramischen Gruppe für ein beliebiges m alle von einander unabhängig; also sind nach dem Satze VI *die Gleichungen jeder erweiterten Beltramischen Gruppe alle von einander unabhängig.* Nach den Theoremen I und II bilden diese Gleichungen stets vollständige Systeme; demnach kann man die Anzahl der Lösungen berechnen.

Die Anzahl der Gleichungen der n^{ten} erweiterten Beltramischen Gruppe ist $n(n+3)$, die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen:

$$\frac{3}{2}n(n+1) + m[2+3+\cdots+(n+1)] = \frac{3}{2}n(n+1) + m\frac{n(n+3)}{2};$$

demnach ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen der Gleichungen der n^{ten} erweiterten Beltramischen Gruppe:

$$\frac{n(n-3)}{2}+m\frac{n(n+3)}{2};$$

die Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Gruppe besitzen ferner

$$\frac{(n-1)(n-4)}{2}+m\frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

unabhängige Lösungen, welche augenscheinlich auch die Gleichungen der n^{ten} Gruppe gestatten. Die Gleichungen der n^{ten} Gruppe ergeben also:

$$\frac{n(n-3)}{2}+m\frac{n(n+3)}{2}-\frac{(n-1)(n-4)}{2}-m\frac{(n-1)(n+2)}{2}=n-2+m(n+1)$$

neue Lösungen; nur in diesen Lösungen werden die Differentialquotienten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von E, F, G und die Differentialquotienten n^{ter} Ordnung von $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ auftreten. Einige von diesen Lösungen sind Gaussische Biegungsinvarianten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; andere, welche ausser den Functionen E, F, G und ihren Ableitungen noch die Ableitungen von $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ enthalten, werden wir als *Beltramische Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung* bezeichnen, weil in ihnen die höchste Ordnung der Differentialquotienten von $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ eben die n^{te} ist.

Man sieht also: es giebt

$2m-1$ Beltramische Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung,
$3m$ Beltramische Biegungsinvarianten 2^{ter} Ordnung,
$4m$ Beltramische Biegungsinvarianten 3^{ter} Ordnung,
$5m+1$ Beltramische Biegungsinvarianten 4^{ter} Ordnung,
$(n+1)m$ Beltramische Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung, wo $n>4$ ist.

Diese Zahlen ergeben sich dadurch, dass wir von der Zahl $n-2+m(n+1)$ die Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordning subtrahieren.

Die Anzahl aller Beltramischen Biegungsinvarianten von der 1^{ten} bis zur n^{ten} Ordnung incl. ist für $n>3$ gleich:

$$(2m-1)+3m+4m+(5m+1)+6m+7m+\ldots+(n+1)m=\frac{n(n+3)}{2}m.$$

Bilden wir für $n > 3$ die n^{te} erweiterte Beltramische Gruppe, welche nur eine einzige der Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ enthält, so definiert sie $\frac{n(n+3)}{2}$ unabhängige Beltramische Biegungsinvarianten, welche natürlich von einer einzigen der Functionen, $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ abhängig sind. Wenn wir jetzt in diese Biegungsinvarianten statt der früheren Function etwa statt φ^σ, alle anderen Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^{\sigma-1}, \varphi^{\sigma+1}, \ldots, \varphi^m$ der Reihe nach einsetzen, so erhalten wir mit den früheren zusammen im Ganzen $\frac{n(n+3)}{2} m$ unabhängige Beltramische Biegungsinvarianten, d. h. alle Beltramischen Biegungsinvarianten, welche unsere n^{te} erweiterte Beltramische Gruppe (11) definiert. Dieses Resultat aber, dass man nämlich die Gruppe bloss auf eine einzige Function φ zu erweitern braucht, gilt nur dann, wenn $n > 3$ ist.

Ist $n = 1$ und erweitert man die Gruppe auf eine einzige Function φ^σ, so ergiebt sich eine einzige Biegungsinvariante, etwa $\Delta\varphi^\sigma$; fügen wir hier die zweite Function $\varphi^{\sigma'}$ hinzu, so erhalten wir 3 Biegungsinvarianten, von denen $\Delta\varphi^\sigma$ und $\Delta\varphi^{\sigma'}$ augenscheinlich zwei sind; die dritte, welche von beiden Functionen φ^σ und $\varphi^{\sigma'}$ abhängen muss, werden wir mit $\theta(\varphi^\sigma\varphi^{\sigma'})$ bezeichnen. Stellt man nun die erste erweiterte Beltramische Gruppe mit allen Functionen $\varphi', \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ auf, so ergeben sich folgende Biegungsinvarianten:

$$1^\circ: \qquad \Delta\varphi^1, \Delta\varphi^2, \ldots, \Delta\varphi^m,$$

$$2^\circ: \quad \theta(\varphi^\sigma\varphi^1), \theta(\varphi^\sigma\varphi^2), \ldots, \theta(\varphi^\sigma\varphi^{\sigma-1}), \theta(\varphi^\sigma\varphi^{\sigma+1}), \ldots, \theta(\varphi^\sigma\varphi^m),$$

welche augenscheinlich alle von einander unabhängig sind; weil ihre Anzahl gleich $2m - 1$ ist, so sind es alle Beltramischen Biegungsinvarianten, welche die erste erweiterte Beltramische Gruppe definiert. Wir könnten nach dem Schema $\theta(\varphi^\sigma\varphi^{\sigma'})$ noch mehrere Biegungsinvarianten ableiten; sie können aber nur eine Folge sein von den in den Reihen 1° und 2° angegebenen Biegungsinvarianten.

Es giebt 3 Biegungsinvarianten 2^{ter} Ordnung mit einer einzigen Function φ^σ. Setzt man in diesen Biegungsinvarianten statt φ^σ nacheinander alle Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^{\sigma-1}, \varphi^{\sigma+1}, \ldots, \varphi^m$, so ergeben sich alle $3m$ Beltramischen Biegungsinvarianten 2^{ter} Ordnung. In derselben Weise werden alle $4m$ Beltramischen Biegungsinvarianten 3^{ter} Ordnung aus den 4 Biegungsinvarianten mit einer einzigen Function φ^σ gebildet.

Was die Biegungsinvarianten 4^{ter} Ordnung anbetrifft, so existieren 6 solcher Biegungsinvarianten mit einer einzigen Function φ^σ. Aus diesen kann man in der angegebenen Weise $6m$ won einander unabhängige Biegungsinvarianten 4^{ter} Ordnung ableiten. Weil aber nur $5m + 1$ unter ihnen von den Biegungsinvarianten niedrigerer Ordnungen unabhängig sind, so können die $m - 1$ übrigen nur eine Folge der 2 Gaussischen Biegungsinvarianten (eine von 2^{ter} und eine von 3^{ter} Ordnung) und der $14m$ Beltramischen Biegungsinvarianten [$(2m - 1)$ 1^{ter}, $3m$ 2^{ter}, $4m$ 3^{ter}, und $5m + 1$ 4^{ter} Ordnung] sein. Umgekehrt also kommen wir zum Schlusse, dass die in der Reihe 2° markierten Biegungsinvarianten nur eine Folge der 2 Gaussischen Biegungsinvarianten (eine von 2^{ter} und eine von 3^{ter} Ordnung) und der $14m$ Beltramischen (m 1^{ter}, $3m$ 2^{ter}, $4m$ 3^{ter} und $6m$ 4^{ter} Ordnung) sind, deren jede nur eine einzige Function φ^σ enthält.

Alle diese Resultate können wir in das folgende Theorem zusammenfassen:

Theorem IV. *Alle Beltramischen Biegungsinvarianten können aus den Lösungen der vollständigen Systeme:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_{\mu\nu}^{(n)} f &= \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f + \sum_{\mu}^{n}{}_{i} \sum_{\nu}^{n-i}{}_{k}\, i_\mu k_\nu \varphi_{i-\mu+1,k-\nu} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ik}} = 0, \\
\overline{\mathfrak{B}}_{\nu\mu}^{(n)} f &= \overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f + \sum_{\mu}^{n}{}_{i} \sum_{\nu}^{n-i}{}_{k}\, i_\mu k_\nu \varphi_{k-\nu,i-\mu+1} \frac{\partial f}{\partial \varphi_{ki}} = 0
\end{aligned}
\qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, \ldots, n-\mu \\ \mu - \nu \neq 0 \end{pmatrix}$$

abgeleitet werden. Diese Gleichungen ergeben 1 Beltramische Biegungsinvariante 1^{ter} Ordnung, $3 - 2^{\text{ter}}$ Ordnung, $4 - 3^{\text{ter}}$ Ordnung, $6 - 4^{\text{ter}}$ Ordnung und $(n+1) - n^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn $n > 4$ ist. Setzt man in diesen Biegungsinvarianten der Reihe nach $\varphi = \varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$, so bekommt man die Gesammtheit aller Beltramischen Biegungsinvarianten. Jede andere Beltramische Biegungsinvariante ist eine Function einer gewissen Anzahl dieser Beltramischen und einer gewissen Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten. Insbesondere existieren $m - 1$ Beltramische Biegungsinvarianten erster Ordnung, welche die Form:

$$\theta(\varphi^\sigma\varphi^1),\ \theta(\varphi^\sigma\varphi^2),\ \ldots,\ \theta(\varphi^\sigma\varphi^{\sigma-1}),\ \theta(\varphi^\sigma\varphi^{\sigma+1}),\ \ldots,\ \theta(\varphi^\sigma\varphi^m)$$

besitzen und Functionen der Gaussischen Biegungsinvarianten bis zur 3^{ten} *Ordnung incl. und der genannten Beltramischen Biegungsinvarianten bis zur* 4^{ten} *Ordnung incl. sind.*

19. Jetzt gehen wir zur Betrachtung der Gleichungen (21) der Mindingschen n^{ten} erweiterten Gruppe über. Benutzt man die erste der Formeln (6), so ergeben sich folgende Gleichungen der 1^{ten} erweiterten Mindingschen Gruppe:

$$\mathfrak{M}_{01}^{(1)} f = E \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial G} + y'^2 \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{10}^{(1)} f = G \frac{\partial f}{\partial F} + 2F \frac{\partial f}{\partial E} - \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$\mathfrak{M}_{10}^{(1)} f = 2E \frac{\partial f}{\partial E} + F \frac{\partial f}{\partial F} + y' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$\overline{\mathfrak{M}}_{01}^{(1)} f = 2G \frac{\partial f}{\partial G} + F \frac{\partial f}{\partial F} - y' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Sind diese Gleichungen nicht alle von einander unabhängig, so muss die Identität:

$$\chi_{01} \mathfrak{M}_{01}^{(1)} f + \bar{\chi}_{10} \overline{\mathfrak{M}}_{10}^{(1)} f + \chi_{10} \mathfrak{M}_{10}^{(1)} f + \bar{\chi}_{01} \overline{\mathfrak{M}}_{01}^{(1)} f = 0$$

durch die Werte (∂_0) (N° 12) befriedigt werden, ohne dass χ_{01} identisch verschwindet. Diese Identität giebt aber:

$$(E + 2Fy' + Gy'^2)\chi_{01} = 0,$$

woraus folgt: $\chi_{01} = 0$; also sind die Gleichungen alle von einander unabhängig. Nach dem Satze VI sind also *alle Gleichungen jeder erweiterten Mindingschen Gruppe von einander unabhängig.* Demnach sind wir im Stande, die Anzahl ihrer Lösungen zu berechnen.

Die Anzahl der Gleichungen der n^{ten} erweiterten Mindingschen Gruppe ist $n(n+3)$, die Anzahl der unabhängigen Veränderlichen: $\frac{3}{2}n(n+1)+n$; demnach ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen gleich $\frac{n(n-3)}{2}+n$.

Die Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Gruppe besitzen ferner $\frac{(n-1)(n-4)}{2}+n-1$ unabhängige Lösungen, welche augenscheinlich auch die Gleichungen der n^{ten} Gruppe gestatten. Die Gleichungen der n^{ten} Gruppe ergeben also $n-1$ neue Lösungen; nur in diesem Lösungen werden die Differentialquotienten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung von E, F, G und die Ableitung $y^{(n)}$ auftreten. Einige dieser Lösungen sind uns als Gaussische Biegungsinvarianten bekannt. Andere, welche ausser den Functionen E, F, G und ihren Differentialquotienten noch die Ableitungen $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ enthalten, wollen wir *Mindingsche Biegungsinvarianten* n^{ter} *Ordnung* nennen. Zieht man also von der Zahl $n-1$ die Anzahl der Gaussischen Biegungsinvarianten $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ab, so erhält man die Anzahl der Mindingschen Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung. Also ergiebt sich folgendes Theorem:

Theorem V. *Die Mindingschen Biegungsinvarianten werden als Lösungen der vollständigen Systeme von der Form:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{\mu\nu}^{(n)} f &= \mathfrak{G}_{\mu\nu}^{(n-1)} f - \sum_1^n{}_l\, g_{\mu\nu}^l(y', \ldots, y^{(l)}) \frac{\partial f}{\partial y^{(l)}} = 0, \\ \overline{\mathfrak{M}}_{\nu\mu}^{(n)} f &= \overline{\mathfrak{G}}_{\nu\mu}^{(n-1)} f - \sum_1^n{}_l\, h_{\nu\mu}^l(y', \ldots, y^{(l)}) \frac{\partial f}{\partial y^{(l)}} = 0, \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} \mu = 0, 1, \ldots, n \\ \nu = 0, 1, \ldots, n-\mu \\ \mu = \nu \neq 0 \end{pmatrix}$$

wo die $g_{\mu\nu}^l$ und $h_{\nu\mu}^l$ gewisse ganze Functionen ihrer Argumente bezeichnen, definiert. Es giebt keine Mindingsche Biegungsinvariante 1^{ter} *Ordnung. Die Anzahl der Mindingschen Biegungsinvarianten* 2^{ter} *Ordnung ist gleich* 1, 3^{ter} *gleich* 1, 4^{ter} *gleich* 2 *und überhaupt* n^{ter}, *wo* $n > 4$ *ist, gleich* 1.

20. Stellen wir jetzt die gewonnenen Resultate in der folgenden Tabelle zusammen:

Ordnung	Anzahl der Biegungsinvarianten			
	Gaussische	Beltramische	Mindingsche	Sämmtliche
1	0	m	0	m
2	0	$3m$	1	$3m+1$
3	1	$4m$	1	$4m+2$
4	1	$6m$	2	$6m+3$
5	3	$6m$	1	$6m+4$
6	4	$7m$	1	$7m+5$
......	......	......	......	....
n	$n-2$	$(n+1)m$	1	$(n+1)m+n-1$
Summe bis zur n^{ten} Ordnung incl.	$\frac{n(n-3)}{2}$	$\frac{n(n+3)}{2}m$	n	$\frac{n(n+3)}{2}m+\frac{n(n-1)}{2}$

In dieser Tabelle haben wir der Bequemlichkeit wegen die ursprünglich als Gaussische Biegungsinvarianten n^{ter} Ordnung definierten Biegungsinvarianten (N° 13) als solche $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung angeführt. Dies ist durch die Definitionen (11) und (12) der Beltramischen und Mindingschen Gruppe verursacht. Die ersten 4 Zeilen der Tabelle entziehen sich der allgemeinen Formel für die Ordnung n erstens deswegen, weil die Gleichungen der 3 ersten Gaussischen Gruppen nicht alle von einander unabhängig sind, zweitens weil wir als grundlegende Beltramische Biegungsinvarianten diejenigen angenommen haben, welche nur eine der Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ enthalten.

Es ist unmittelbar klar, dass *die Gleichungen jeder allgemeinen erweiterten Gruppe alle von einander unabhängig sind.* Für die n^{te} erweiterte Gruppe haben wir $n(n+3)$ Gleichungen und $\frac{3}{2}n(n+1)+m\frac{n(n+3)}{2}+n$ unabhängige Veränderliche; also ist die Anzahl der unabhängigen Lösungen $\frac{n(n+3)}{2}m+\frac{n(n-1)}{2}$. Ist also $n>3$, so geben die Gleichungen der n^{ten} erweiterten allgemeinen Gruppe keine neuen Biegungsinvarianten. Alle Lösungen dieser Gleichungen sind nur Functionen der Gaussischen Biegungsinvarianten bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung incl. und der Beltramischen und Mindingschen bis zur n^{ten} Ordnung incl. Das gilt aber nur für $n>3$.

Die Anzahl der Lösungen von Gleichungen der n^{ten} erweiterten allgemeinen Gruppe, welche die Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ Gruppe nicht gestatten, ist: $(n+1)m+n-1$. Für $n=1$ erhalten wir $2m$ Lösungen, für $n=2$ $3m+1$, für $n=3$ $4m+2$ und für $n=4$ $5m+3$. Ausser den in den Reihen 1° und 2° aufgeführten Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung erhalten wir also noch eine Biegungsinvariante, welche von y' abhängen muss. Vorausgesetzt, dass die allgemeine erste erweiterte Gruppe nur eine Function φ^σ enthält, sehen wir, dass sie 2 Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung definiert; eine von diesen Biegungsinvarianten ist $\Delta\varphi^\sigma$; die andere muss von y' abhängen. Wir wollen sie mit $I(\varphi^\sigma y')$ bezeichnen. Es ist klar, dass alle Biegungsinvarianten:

$$(\alpha) \qquad I(\varphi^1 y')\,,\ I(\varphi^2 y')\,,\ \ldots\,,\ I(\varphi^m y')$$

den Gleichungen der ersten erweiterten allgemeinen Gruppe genügen müssen, sobald diese auf alle Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ erweitert ist. Weil aber diese Gleichungen gerade $2m$ unabhängige Lösungen zulassen, so müssen die Biegungsinvarianten:

$$I(\varphi^1 y')\,,\ I(\varphi^2 y')\,,\ \ldots\,,\ I(\varphi^{\sigma-1} y')\,,\ I(\varphi^{\sigma+1} y')\,,\ \ldots\,,\ I(\varphi^m y')$$

Functionen von Biegungsinvarianten:

$$(\beta) \qquad \left|\begin{array}{ll} \Delta\varphi^{s'}, & {\scriptstyle (s'=1,2,\ldots,m)} \\ \Theta(\varphi^s\varphi^{s'}) \quad \text{und} \quad I(\varphi^\sigma y') & {\scriptstyle (s'=1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots,m)} \end{array}\right.$$

sein. Ferner sind alle in der Tabelle angegebenen Biegungsinvarianten 2^{ter} und 3^{ter} Ordnung von den in der Reihe (β) angeführten Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung unabhängig. Dies gilt aber nicht von den $6m+3$ Biegungsinvarianten 4^{ter} Ordnung. Nur $5m+3$ von ihnen sind neue Biegungsinvarianten; die m übrigen sind Functionen der in der Reihe (β) aufgezählten Biegungsinvarianten 1^{ter} Ordnung, der $3m+1$ Biegungsinvarianten 2^{ter}, $4m + 2$ 3^{ter} und $5m + 3$. 4^{ter} Ordnung. Umgekehrt also kommen wir zu dem Schluss, dass die Biegungsinvarianten:

$$\theta(\varphi^s \varphi^{s'}) \quad \text{und} \quad I(\varphi^\sigma y') \qquad {\scriptstyle (s'=1,2,\ldots,s-1,s+1,\ldots,m)}$$

Functionen der in der Tabelle aufgeführten Biegungsinvarianten 1^{ter}, 2^{ter}, 3^{ter} und 4^{ter} Ordnung sind. Das gewonnene Resultat bezieht sich auf alle Biegungsinvarianten:

$$I(\varphi^1 y'),\ I(\varphi^2 y'),\ \ldots,\ I(\varphi^m y').$$

Was die Biegungsinvarianten $\theta(\varphi^s \varphi^{s'})$ anbetrifft, so haben wir für sie in N° 18 bereits einen noch bestimmteren Satz bewiesen.

Unsere jetzt erhaltenen Resultate können wir folgendermassen zusammenfassen:

Theorem VI. *Die allgemeine erweiterte Gruppe giebt ausser den Gaussischen, Beltramischen und Mindingschen Biegungsinvarianten keine neuen Biegungsinvarianten. Jede Biegungsinvariante, welche gleichzeitig von E, F, G und deren Differentialquotienten, von den Differentialquotienten der Functionen $\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m$ und von den Ableitungen $y', y'', \ldots$ abhängt, ist nur eine Function einer gewissen Anzahl von Gaussischen, Beltramischen und Mindingschen Biegungsinvarianten. Insbesondere existieren Biegungsinvarianten* 1^{ter} *Ordnung von der Form:*

$$I(\varphi^1 y'),\ I(\varphi^2 y'),\ \ldots,\ I(\varphi^m y'),$$

welche Functionen einiger, in den früheren Theoremen angegebenen, grundlegenden Biegungsinvarianten und zwar Gaussischer 2^{ter} *und* 3^{ter} *Ordnung und Beltramischer und Mindingscher von der* 1^{ten} *bis zur* 4^{ten} *Ordnung incl. sind.*

Damit schliesse ich den ersten Teil meiner Arbeit; ich muss aber hier hervorheben, dass meine Betrachtungen noch eine gewisse Willkürlichkeit enthalten: man brauchte als wesentliche, grundlegende Biegungsinvarianten nicht eben diejenigen zu bezeichnen, welche ich als solche angenommen habe. Doch schien mir meine Annahme vom theoretischen Standpunkte aus die naturgemässe sein, weil sie den Umstand besonders betont, dass *die Beltramischen erweiterten Gruppen nur in Bezug auf eine einzige Function φ erweitert zu werden brauchen.*

§ V. *Über die Berechnung der Biegungsinvarianten im Allgemeinen.*

Wir haben gesehen, dass man alle Biegungsinvarianten durch Integration gewisser vollständiger Systeme berechnen kann. In diesem Paragraphen habe ich die Absicht zu untersuchen, wie sich diese vollständigen Systeme in möglichst bequemer Weise integrieren lassen.

Diesen Betrachtungen muss ich einige allgemeine Sätze vorausschicken.

21. Nach der Jacobischen Methode lassen sich nicht nur die Jacobischen Systeme integrieren; man kann nämlich, wenn man die Gleichungen des Systems nicht in einer beliebigen, sondern in einer gewissen bestimmten Reihenfolge integriert, die Jacobische Methode auch auf allgemeinere vollständige Systeme anwenden. Und zwar können wir folgenden Satz angeben:

Satz VII: *Ein q-gliedriges vollständiges System:*

$$X_k f = \xi_{k1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \xi_{k2}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \xi_{kn}\frac{\partial f}{\partial x_n} = 0, \qquad (k=1,2,\dots,q)$$

dessen Poissonsche Ausdrücke:

$$(X_k X_l) = \sum_1^{k-1}{}_s\, \omega_{kls}(x_1, x_2, \dots, x_n) X_s f\,^{1} \qquad \begin{pmatrix} k=2,3,\dots,q \\ l=1,2,\dots,k-1 \end{pmatrix}$$

sind, braucht man nicht auf ein Jacobisches System zurückzuführen; es lässt sich vielmehr in der Reihenfolge:

$$X_1 f = 0, \qquad X_2 f = 0, \quad \dots, \quad X_q f = 0$$

unmittelbar integrieren.

---

[1] Sind hier die ω_{kls} von den $x_1, x_2, \dots, x_n$ unabhängig, so bilden die infinitesimalen Transformationen $X_k f$ eine q-gliedrige Gruppe, deren Betrachtung man im LIE'schen Lehrbuche: *Theorie der Transformationsgruppen.* Erster Abschnitt. Kapitel 28. findet.

Dieser Satz bedarf eigentlich keines Beweises, denn es ist völlig klar, dass wenn φ eine gemeinsame Lösung der Gleichungen:

$$X_1 f = 0, \qquad X_2 f = 0, \quad \ldots, \quad X_{k-1} f = 0$$

ist, $X_k(\varphi)$ ebenfalls eine gemeinsame Lösung dieser Gleichungen vorstellt.

Satz VIII: *Ein q-gliedriges vollständiges System:*

$$(\alpha) \qquad X_1 f = 0, \qquad X_2 f = 0, \quad \ldots, \quad X_{q-1} f = 0, \qquad Y_q f = 0,$$

dessen Poissonsche Ausdrücke:

$$(X_k X_l) = \sum_1^{k-1} {}_s\, \omega_{kls} X_s f, \qquad \binom{k=2,3,\ldots,q-1}{l=1,2,\ldots,k-1}$$

$$(Y_q X_l) = \sum_1^{q-1} {}_s\, \overline{\omega}_{qls} X_s f + \overline{\omega}_{qlq} Y_q f \qquad (l=1,2,\ldots,q-1)$$

sind, lässt sich durch die Annahme:

$$(\beta) \qquad X_q f = \frac{Y_q f}{Y_q(\varphi)},$$

wo φ eine gemeinsame Lösung der Gleichungen:

$$X_1 f = 0, \qquad X_2 f = 0, \quad \ldots, \quad X_{q-1} f = 0,$$

aber keine Lösung der Gleichung $Y_q f = 0$ ist,[1] *auf ein System:*

$$X_1 f = 0, \qquad X_2 f = 0, \quad \ldots, \quad X_q f = 0$$

von der Beschaffenheit:

$$(X_k X_l) = \sum_1^{k-1} {}_s\, \omega_{kls} X_s f \qquad \binom{k=2,3,\ldots,q}{l=1,2,\ldots,k-1}$$

zurückführen.

Der Beweis ist sehr einfach. Nimmt man an, dass:

$$(X_q X_l) = X_q[X_l(f)] - X_l[X_q(f)] = \sum_1^{q-1} {}_s\, \omega_{qls} X_s f + \omega_{qlq} X_q f, \quad (l=1,2,\ldots,q-1)$$

[1] Es muss wenigstens eine solche Function φ geben. Angenommen, dass alle Lösungen der Gleichungen $X_l f = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, q-1)$ auch die Gleichung $Y_q f = 0$ befriedigten, so kommen wir zum Schlusse, dass das System (α) $n - q + 1$ unabhängige Lösungen besitzt, was unmöglich ist.

und setzt man in diesen Identitäten $f=\varphi$, so verschwinden alle Glieder ausser $\omega_{qlq}X_q f$, denn es ist $X_l(\varphi)=0$ und $X_q(\varphi)=1$. Es ergiebt sich also: $\omega_{qlq}=0$; und damit ist der Satz bewiesen.

Dieser Satz lehrt andererseits, dass man das System (α) in der bezeichneten Reihenfolge ohne die Transformation (β) integrieren kann; alsdann werden zwar die Coefficienten der Differentialquotienten von f genommen nach den Lösungen der Gleichungen $X_l f=0$ $(l=1,2,\ldots,q-1)$, in $Y_q f=0$ nicht nur von diesen Lösungen abhängen, sondern noch von anderen Veränderlichen, diese werden aber hier nur als ein allen Gliedern gemeinsamer Multiplicator vorkommen und deshalb sich vollständig wegheben. In der Praxis ist es aber bequemer, die Transformation (β) anzuwenden.

22. Die linken Seiten der Gleichungen der vollständigen Systeme, welche die Biegungsinvarianten definieren, sind gewisse infinitesimale Transformationen, welche stets endliche continuierliche Gruppen bilden. Die Frage also nach den Poissonschen Ausdrücken der Gleichungen unserer vollständigen Systeme, reduciert sich auf die Frage, welche Zusammensetzung die betreffenden endlichen Gruppen besitzen. Um darauf die Antwort zu geben, sehe ich mich veranlasst, wieder zwei allgemeine Sätze aufzustellen.

Satz IX: *Bestehen für die q-gliedrige endliche continuierliche Gruppe:*

$$X_k f=\sum_1^n {}_i\, \xi_{ki}(x_1,x_2,\ldots,x_n)\frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k=1,2,\ldots,q)$$

die Relationen:

$$(X_k X_l)=\sum_1^q {}_s\, c_{kls}X_s f, \qquad \left(\begin{smallmatrix}k=2,3,\ldots,q\\ l=1,2,\ldots,k-1\end{smallmatrix}\right)$$

und erzeugen die infinitesimalen Transformationen:

$$Z_k f=X_k f+\sum_1^m {}_i\, \zeta_{ki}(x_1,\ldots,x_n;z_1,\ldots,z_m)\frac{\partial f}{\partial z_i} \qquad (k=1,2,\ldots,q)$$

ebenfalls eine continuierliche Gruppe, so bestehen für diese Gruppe die Relationen:

$$(Z_k Z_l)=\sum_1^q {}_s\, c_{kls}Z_s f \qquad \left(\begin{smallmatrix}k=2,3,\ldots,q\\ l=1,2,\ldots,k-1\end{smallmatrix}\right)$$

oder, anders gesagt, so sind beide Gruppen gleichzusammengesetzt.

Ist nämlich:

$$(Z_k Z_l) = \sum_1^q {}_s c'_{kls} Z_s f, \qquad \left(\begin{smallmatrix} k=2,3,\dots,q \\ l=1,2,\dots,k-1 \end{smallmatrix}\right)$$

so ergeben sich, wenn man die Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial z_i}$ in diesen Identitäten gleich o setzt, die Relationen:

$$(X_k X_l) = \sum_1^q {}_s c'_{kls} X_s f, \qquad \left(\begin{smallmatrix} k=2,3,\dots,q \\ l=1,2,\dots,k-1 \end{smallmatrix}\right)$$

woraus folgt, dass notwendig $c'_{kls} = c_{kls}$ ist, und damit ist der Satz bewiesen.

Satz X: *Bilden die infinitesimalen Transformationen:*

$$X_k f = \sum_1^n {}_i \xi_{ki}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} + Z_k f, \qquad (k=1,2,\dots,q)$$

wo

$$Z_k f = \sum_1^m {}_i \zeta_{ki}(x_1, \dots, x_n; z_1, \dots, z_m) \frac{\partial f}{\partial z_i} \qquad (k=1,2,\dots,q)$$

ist, eine q-gliedrige continuierliche Gruppe, und kann erstens die Relation:

$$\sum_1^q {}_k e_k Z_k f = 0,$$

wo die e_k numerische Constanten bezeichnen, nur dann bestehen, wenn alle e_k gleich Null sind, und bestehen zweitens die Relationen:

$$(Z_k Z_l) = \sum_1^q {}_s c_{kls} Z_s f, \qquad \left(\begin{smallmatrix} k=2,3,\dots,q \\ l=1,2,\dots,k-1 \end{smallmatrix}\right)$$

wo die c_{kls} ebenfalls numerische Constanten sind, so ist die Zusammensetzung unserer Gruppe:

$$(X_k X_l) = \sum_1^q {}_s c_{kls} X_s f. \qquad \left(\begin{smallmatrix} k=2,3,\dots,q \\ l=1,2,\dots,k-1 \end{smallmatrix}\right)$$

Nimmt man nämlich an, dass:

$$(X_k X_l) = \sum_1^q {}_s c'_{kls} X_s f, \qquad \left(\begin{smallmatrix} k=2,3,\dots,q \\ l=1,2,\dots,k-1 \end{smallmatrix}\right)$$

wo $c'_{kls} \gtrless c_{kls}$, und setzt man in diesen Identitäten alle Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, so ergiebt sich:

$$(Z_k Z_l) = \sum_1^q {}_s c'_{kls} Z_s f. \qquad \binom{k=2,3,\ldots,q}{l=1,2,\ldots,k-1}$$

Wären die Constanten e_k nicht alle gleich Null, so wäre denkbar, dass man diese Relationen auf die frühere Form bringen könnte, weil das aber nicht der Fall ist, so ist unsere Annahme falsch und der Satz bewiesen.

23. Jetzt wollen wir versuchen, ob wir den Satz X auf die Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe anwenden können. Aus den Gleichungen (14) erhalten wir, indem wir dort $\nu = \lambda + 1 - \mu$ setzen und in derselben Weise verfahren, wie wir es bereits in N° 10 gethan:

$$(25) \qquad \left| \begin{aligned} \mathfrak{G}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f &= \mathfrak{G}^{(n-1)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f + \Gamma^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f = 0, \\ \overline{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f &= \overline{\mathfrak{G}}^{(n-1)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f + \overline{\Gamma}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f = 0, \end{aligned} \right. \qquad \binom{\lambda=0,1,\ldots,n}{\mu=0,1,\ldots,\lambda+1}$$

wo:

$$\Gamma^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f = \sum_{\mu-1}^{n} {}_i \Big\{ (2i_{\mu-1} + i_\mu)(n-i)_{\lambda+1-\mu} E_{i-\mu+1,n-i-\lambda-1+\mu} \frac{\partial f}{\partial E_{i,n-i}}$$

$$+ [(i+1)_\mu (n-i)_{\lambda+1-\mu} F_{i-\mu+1,n-i-\lambda-1+\mu} + i_\mu (n-i)_{\lambda-\mu} E_{i-\mu,n-i-\lambda+\mu}] \frac{\partial f}{\partial F_{i,n-i}}$$

$$+ i_\mu [2(n-i)_{\lambda-\mu} F_{i-\mu,n-i-\lambda+\mu} + (n-i)_{\lambda+1-\mu} G_{i-\mu+1,n-i-\lambda-1+\mu}] \frac{\partial f}{\partial G_{i,n-i}} \Big\},$$

$$\overline{\Gamma}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f = \sum_{\mu-1}^{n} {}_i \Big\{ (n-i)_{\lambda+1-\mu} (2i_{\mu-1} F_{i-\mu+1,n-i-\lambda-1+\mu} + i_\mu E_{i-\mu,n-i-\lambda+\mu}) \frac{\partial f}{\partial E_{i,n-i}}$$

$$+ [i_\mu (n-i+1)_{\lambda+1-\mu} F_{i-\mu,n-i-\lambda+\mu} + i_{\mu-1} (n-i)_{\lambda+1-\mu} G_{i-\mu+1,n-i-1-\lambda+\mu}] \frac{\partial f}{\partial F_{i,n-i}}$$

$$+ [2(n-i)_{\lambda-\mu} + (n-i)_{\lambda+1-\mu}] G_{i-\mu,n-i-\lambda+\mu} \frac{\partial f}{\partial G_{i,n-i}} \Big\}.$$

Der Bequemlichkeit wegen werde ich alle diejenigen von den Gleichungen (25), für welche λ denselben Werth besitzt, *Gleichungen λ^{ter} Classe* nennen.

Wir sehen, dass in den Ausdrücken $\Gamma^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f$ und $\overline{\Gamma}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f$ die Ordnung der Differentialquotienten von E, F, G, nach welchen f differentiiert wird, überall die n^{te} ist. Ferner kommen solche Differentialquotienten von f in den Ausdrücken $\mathfrak{G}^{(n-1)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f$ und $\bar{\mathfrak{G}}^{(n-1)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f$ augenscheinlich nicht vor; auch die Coefficienten der Differentialquotienten von f sind in diesen Ausdrücken von den Differentialquotienten n^{ter} Ordnung der E, F, G unabhängig. Demnach sind die infinitesimalen Transformationen $\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f$ und $\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f$ von derselben Art wie die Transformationen $X_k f$ in unserem Satze X. Die Rolle der Veränderlichen z_i spielen hier die Differentialquotienten n^{ter} Ordnung von E, F, G; die Rolle der Veränderlichen x_i fällt den Differentialquotienten niedrigerer Ordnungen von E, F, G zu. Nun versuchen wir nachzuweisen, dass die Identität:

$$(26) \qquad \sum_0^n{}_\lambda \sum_0^{\lambda+1}{}_\mu (e_{\lambda\mu} \Gamma^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f + \bar{e}_{\lambda\mu} \bar{\Gamma}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f) = 0,$$

wo $e_{\lambda\mu}$ und $\bar{e}_{\lambda\mu}$ numerische Constanten bezeichnen, nur dann möglich ist, wenn alle $e_{\lambda\mu}$ und $\bar{e}_{\lambda\mu}$ gleichzeitig verschwinden. Wir bemerken nämlich, dass die Coefficienten der Differentialquotienten von f in allen: $\Gamma^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f$ und $\bar{\Gamma}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f$ lineare homogene Functionen der Differentialquotienten von E, F, G sind; die Ordnung aller dieser Differentialquotienten ist $n - \lambda$, also für jede Classe constant, und von den Ordnungen dieser Differentialquotienten in jeder anderen Classe verschieden. Weil aber unsere Identität nur bei constanten Werten von $e_{\lambda\mu}$ und $\bar{e}_{\lambda\mu}$ bestehen soll, so ist das nur dann möglich, wenn die $n + 1$ Identitäten:

$$(26') \qquad \sum_0^{\lambda+1}{}_\mu (e_{\lambda\mu} \Gamma^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f + \bar{e}_{\lambda\mu} \bar{\Gamma}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f) = 0 \qquad (\lambda=0,1,\ldots,n)$$

bestehen. Betrachten wir gleichzeitig zwei Classen λ und λ', wo $\lambda' < \lambda$ ist! Die Ordnung der Differentialquotienten von E, F, G, welche in die Coefficienten der Differentialquotienten von f eingehen, ist $n - \lambda$ resp. $n - \lambda'$. Weil aber $n - \lambda' > n - \lambda$ ist, so ist die Anzahl dieser Differentialquotienten von E, F, G für die Classe λ' grösser als für die Classe λ. Kann also die letzte Identität für die Classe λ nur in der Weise bestehen, dass alle $e_{\lambda\mu}$ und $\bar{e}_{\lambda\mu}$ verschwinden, so kann ihr Auftreten für die Classe λ' nur in derselben Weise möglich sein. Weil aber nach unseren Entwickelungen in N° 11 das Bestehen einer solchen Identität für $\lambda = n$ sogar dann, wenn $e_{n\mu}$ und $\bar{e}_{n\mu}$ keine Constanten sein sollen, notwendig das Verschwinden dieser Grössen verlangt, so kommen wir zum Schlusse, dass in der Identität (26) alle $e_{\lambda\mu}$ und $\bar{e}_{\lambda\mu}$ gleich Null sind.[1] Also reduciert sich nach dem Satze X die Untersuchung der Zusammensetzung der endlichen Gruppe, welche als infinitesimale Transformationen die linken Seiten

---

[1] Doch scheint dieser Beweis nicht ganz streng zu sein; deshalb wollen wir einen anderen angeben. Soll unsere Identität (26′) bestehen, so müssen die Coefficienten der Differentialquotienten von f alle identisch Null werden. Insbesondere giebt der Coefficient von $\dfrac{\partial f}{\partial E_{i',n-i'}}$:

$$\text{(a)} \qquad \sum_0^{\lambda+1}{}_{\mu} \Big\{ e_{\lambda\mu}(2i'_{\mu-1} + i'_{\mu})(n - i')_{\lambda+1-\mu} E_{i'-\mu+1,n-i'-\lambda-1+\mu}$$
$$+ \bar{e}_{\lambda\mu}(n - i')_{\lambda+1-\mu}(2i'_{\mu-1} F_{i'-\mu+1,n-i'-\lambda-1+\mu} + i'_{\mu} E_{i'-\mu,n-i'-\lambda+\mu}) \Big\} = 0.$$

$(n - i')_{\lambda+1-\mu}$ ist immer dann und nur dann von Null verschieden, wenn $(\lambda + 1 - \mu) \leqq (n - i')$ ist; im Grenzfalle $\lambda + 1 - \mu = n - i'$ bekommen wir $0_0 = 1$ (N° 6). Also erstreckt sich die Summation nach μ von $\lambda + 1 - (n - i')$ bis $\lambda + 1$. Demnach können wir die frühere Gleichung folgendermassen schreiben:

$$\sum_{\lambda+2-(\mu-i')}^{\lambda+1}{}_{\mu} \{ \ \} + e_{\lambda,\lambda+1-(n-i')}(2i'_{\lambda-(n-i')} + i'_{\lambda+1-(n-i')}) E_{n-\lambda,0}$$
$$+ \bar{e}_{\lambda,\lambda+1-(n-i')}(2i'_{\lambda-(n-i')} F_{n-\lambda,0} + i'_{\lambda+1-(n-i')} E_{n-\lambda-1,1}) = 0.$$

Der Ausdruck $i'_{\lambda-(n-i')}$ verschwindet nur dann, wenn $i' - (n - \lambda) > i'$, wenn also $n - \lambda < 0$, was unmöglich ist; demnach kann weder der Coefficient von $e_{\lambda,\lambda+1-(n-i')}$ noch der Coefficient von $\bar{e}_{\lambda,\lambda+1-(n-i')}$ verschwinden. Weil ferner $E_{n-\lambda,0}$ und $F_{n-\lambda,0}$ unter dem Summenzeichen nicht auftreten können, so erhält man:

$$e_{\lambda,\lambda+1-(n-i')} = \bar{e}_{\lambda,\lambda+1-(n-i')} = 0.$$

Dieses Resultat gilt aber nur dann, wenn $\lambda - (n - i') \geqq 0$ ist; also ergiebt sich:

$$e_{\lambda 1} = \bar{e}_{\lambda 1} = e_{\lambda 2} = \bar{e}_{\lambda 2} = \ldots = e_{\lambda,\lambda+1} = \bar{e}_{\lambda,\lambda+1} = 0. \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n)$$

Es handelt sich also nur darum, zu beweisen, dass $e_{\lambda 0} = \bar{e}_{\lambda 0} = 0$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, n)$ ist. Setzt man in der Identität (a) $i' = \mu = 0$, so ergiebt sich:

$$e_{\lambda 0} n_{\lambda+1} E_{1,n-\lambda-1} + \bar{e}_{\lambda 0} n_{\lambda+1} E_{0,n-\lambda} = 0,$$

wo wir mit dem Multiplicator $n_{\lambda+1}$ dividieren dürfen, ausser wenn $\lambda = n$ ist, wo $n_{\lambda+1} = 0$ ist; wir erhalten also $e_{\lambda 0} = \bar{e}_{\lambda 0} = 0$ $(\lambda = 0, 1, \ldots, n - 1)$. Weil aber alle $e_{n\mu}$ und $\bar{e}_{n\mu}$ gleich Null sein müssen, so erhalten wir:

$$e_{\lambda 0} = \bar{e}_{\lambda 0} = 0. \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots, n)$$

Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

der Gleichungen (25) besitzt, auf die Ableitung der Poissonschen Symbole für die Ausdrücke $\Gamma^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f$ und $\overline{\Gamma}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f$.

In diesen Ausdrücken wird f immer nach den Differentialquotienten n^{ter} Ordnung von E, F, G differentiiert; weil aber diese Differentialquotienten in den Coefficienten der Differentialquotienten von f für die Classen $1, 2, \ldots, n$ nirgends vorkommen, so schliessen wir unmittelbar, dass:

$$\left(\Gamma'^{(n)}_{\mu',\lambda'+1-\mu'}, \Gamma'^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}\right) = 0, \qquad \begin{pmatrix} \lambda'=1,2,\ldots,n \\ \mu'=0,1,\ldots,\lambda'+1 \\ \lambda=1,2,\ldots,n \\ \mu=0,1,\ldots,\lambda+1 \end{pmatrix}$$

wo Γ' entweder Γ oder aber $\overline{\Gamma}$ bezeichnet. Weil ferner nur für die Classe 0 die Coefficienten der Differentialquotienten von f die Differentialquotienten n^{ter} Ordnung der E, F, G enthalten, haben wir:

$$\left(\Gamma'^{(n)}_{\mu',0+1-\mu'}, \Gamma'^{(n)}_{\mu,0+1-\mu}\right) = \left[\Gamma'^{(n)}_{\mu,0+1-\mu}f\right], \qquad \begin{pmatrix} \mu=0,1 \\ \mu'=0,1 \end{pmatrix}$$

wo $[\Gamma'^{(n)}_{\mu,0+1-\mu}f]$ einen linearen homogenen Ausdruck mit constanten Coefficienten der Ausdrücke $\Gamma'f$ nullter Classe bezeichnet. Erinnert man sich endlich, dass die Coefficienten der Differentialquotienten von f in den $\Gamma'f$ λ^{ter} Classe lineare und homogene Functionen der Differentialquotienten $(n-\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung von E, F, G sind, so resultiert notwendig:

$$\left(\Gamma'^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}, \Gamma'^{(n)}_{\mu',0+1-\mu'}\right) = \left[\Gamma'^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}\right]. \qquad \begin{pmatrix} \lambda=1,2,\ldots,n \\ \mu=0,1,2,\ldots,\lambda+1 \\ \mu'=0,1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir jetzt den Satz X in Anwendung bringen, so ergiebt sich folgendes:

1) Die infinitesimalen Transformationen:

$$\mathfrak{G}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f \quad \text{und} \quad \overline{\mathfrak{G}}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu}f \qquad \begin{pmatrix} \lambda=1,2,\ldots,n \\ \mu=0,1,\ldots,\lambda+1 \end{pmatrix}$$

bilden eine endliche continuierliche Gruppe mit lauter vertauschbaren Transformationen; 2) die infinitesimalen Transformationen: $\mathfrak{G}^{(n)}_{01}f$, $\mathfrak{G}^{(n)}_{10}f$, $\overline{\mathfrak{G}}^{(n)}_{01}f$, $\overline{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}f$ bilden eine 4-gliedrige continuierliche Gruppe; 3) die Poissonschen Ausdrücke jeder dieser infinitesimalen Transformationen mit jeder infinitesimalen Transformation, welche der Classe λ angehört ($\lambda = 1, 2, \ldots, n$) können nur von den infinitesimalen Transformationen dieser Classe λ abhängen.

Die Zusammensetzung der 4-gliedrigen Gruppe müssen wir aber genau berechnen. Nach dem Satze IX reduciert sich diese Rechnung auf die

Berechnung der Zusammensetzung der Gruppe: $\mathfrak{G}_{01}f$, $\mathfrak{G}_{10}f$, $\bar{\mathfrak{G}}_{01}f$, $\bar{\mathfrak{G}}_{10}f$ (N° 12 (α_0)). Fürht man diese Rechnung wirklich aus, so gelangt man zu folgendem Resultate:

$$
(27) \qquad \left\{
\begin{array}{ll}
(\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}, \mathfrak{G}^{(n)}_{01}) = \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{01}f - \mathfrak{G}^{(n)}_{10}f, & (\mathfrak{G}^{(n)}_{10}, \mathfrak{G}^{(n)}_{01}) = \mathfrak{G}^{(n)}_{01}f, \\
(\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{01}, \mathfrak{G}^{(n)}_{01}) = - \mathfrak{G}^{(n)}_{01}f, & (\mathfrak{G}^{(n)}_{10}, \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}) = - \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}f, \\
(\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{01}, \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}) = \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}f, & (\bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{01}, \mathfrak{G}^{(n)}_{10}) = 0.
\end{array}
\right.
$$

Zuerst also bilden die Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gruppe aller Classen ausser der Classe 0 zusammengenommen ein Jacobisches System. Demnach kann man diese Gleichungen ohne irgend welche Transformationen und in einer beliebigen Reihenfolge integrieren. Setzt man nun die erhaltenen Lösungen in irgend eine der Gleichungen:

$$
(27') \qquad \mathfrak{G}^{(n)}_{01}f = 0, \qquad \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}f = 0, \qquad \mathfrak{G}^{(n)}_{10}f = 0, \qquad \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{01}f = 0
$$

statt der ursprünglichen Veränderlichen ein, so erhält man nach der bewiesenen Eigenschaft 3) eine Gleichung, welche die ursprünglichen Veränderlichen nicht enthält. Nun aber giebt es, wie die Formeln (27) zeigen, keine Reihenfolge der Gleichungen (27'), welche die im Satz VII angegebene Eigenschaft besitzt. Andererseits giebt es aber 4 Reihenfolgen der Gleichungen (27'), nämlich:

$$
\begin{array}{lllll}
1^{\text{te}} & \mathfrak{G}^{(n)}_{01}f = 0, & \mathfrak{G}^{(n)}_{10}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{01}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}f = 0, \\
2^{\text{te}} & \mathfrak{G}^{(n)}_{01}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{01}f = 0, & \mathfrak{G}^{(n)}_{10}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}f = 0, \\
3^{\text{te}} & \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}f = 0, & \mathfrak{G}^{(n)}_{10}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{01}f = 0, & \mathfrak{G}^{(n)}_{01}f = 0, \\
4^{\text{te}} & \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{10}f = 0, & \bar{\mathfrak{G}}^{(n)}_{01}f = 0, & \mathfrak{G}^{(n)}_{10}f = 0, & \mathfrak{G}^{(n)}_{01}f = 0,
\end{array}
$$

welche specielle Fälle des Systems des Satzes VIII sind. Hat man also die Gleichungen der höheren Classen integriert, so kann man die übrigen Gleichungen der Classe 0 in einer der 4 angegebenen Reihenfolgen auf die im Satze VIII angegebene Weise integrieren.

Es ist dabei ganz evident, dass diese Resultate, welche wir für die Gestalt (14) oder (25) der Gleichungen der n^{ten} erweiterten Gaussischen Gruppe bewiesen haben, sich auch auf die Gestalt (17) dieser Gleichungen beziehen.

Ferner kann man alle diese Ergebnisse auf die Gleichungen der Beltramischen (18), Mindingschen (21) und allgemeinen (23) n^{ten} erweiterten Gruppe ausdehnen. Setzt man nämlich dort überall $\nu = \lambda + 1 - \mu$, teilt die Gleichungen in Classen ein (wobei zu bemerken ist, dass hier nur n verschiedene Classen vorhanden sind, da λ nur gleich $0, 1, \dots, n-1$ sein kann) und benutzt den Satz IX, so ergeben sich unsere früheren Resultate auch für diese vollständigen Systeme ohne Weiteres.

Um ein allgemeines Theorem aufstellen zu können, setzen wir statt der Buchstaben $\mathfrak{G}, \mathfrak{B}, \mathfrak{M}, \mathfrak{A}$ überall $\mathfrak{F}$; mit anderen Worten: bezeichnen wir mit:

$$\mathfrak{F}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f = 0, \qquad \bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{\lambda+1-\mu,\mu} f = 0 \qquad \binom{\lambda = 0, 1, \dots, n-1}{\mu = 0, 1, \dots, \lambda+1}$$

entweder die Gleichungen der $(n-1)^{\text{ten}}$ erweiterten Gaussischen oder der n^{ten} Beltramischen, Mindingschen oder allgemeinen erweiterten Gruppe, so haben wir:

Theorem VII. *Um das vollständige System:*

$$\mathfrak{F}^{(n)}_{\mu,\lambda+1-\mu} f = 0, \qquad \bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{\lambda+1-\mu,\mu} f = 0 \qquad \binom{\lambda = 0, 1, \dots, n-1}{\mu = 0, 1, \dots, \lambda+1}$$

nach der Jacobischen Methode zu integrieren, integriert man zuerst in beliebiger Reihenfolge die Gleichungen aller Classen ausser der Classe 0. *Diese Gleichungen aber integriert man weiter in einer der* 4 *Reihenfolgen:*

$$1^{\text{te}} \quad \mathfrak{F}^{(n)}_{01} f = 0, \qquad \mathfrak{F}^{(n)}_{10} f = 0, \qquad \bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{01} f = 0, \qquad \frac{\bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{10} f}{\bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{10}(\Phi)} = 0,$$

$$2^{\text{te}} \quad \mathfrak{F}^{(n)}_{01} f = 0, \qquad \bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{01} f = 0, \qquad \mathfrak{F}^{(n)}_{10} f = 0, \qquad \frac{\bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{10} f}{\bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{10}(\Phi)} = 0,$$

$$3^{\text{te}} \quad \bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{10} f = 0, \qquad \mathfrak{F}^{(n)}_{10} f = 0, \qquad \bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{01} f = 0, \qquad \frac{\mathfrak{F}^{(n)}_{01} f}{\mathfrak{F}^{(n)}_{01}(\Phi)} = 0,$$

$$4^{\text{te}} \quad \bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{10} f = 0, \qquad \bar{\mathfrak{F}}^{(n)}_{01} f = 0, \qquad \mathfrak{F}^{(n)}_{10} f = 0, \qquad \frac{\mathfrak{F}^{(n)}_{01} f}{\mathfrak{F}^{(n)}_{01}(\Phi)} = 0,$$

wo Φ überall eine gemeinsame Lösung aller schon integrierten, aber kein Lösung der letzten Gleichung bezeichnet.

§ VI. *Berechnung einiger Biegungsinvarianten niedrigster Ordnungen.*

Hier stelle ich einige Biegungsinvarianten auf, indem ich das Theorem VII in Anwendung bringe. Man könnte eigentlich diese Rechnungen ohne Benutzung des Theorems VII vollständig durchführen; doch scheint mir die dort angegebene Integrationsweise hier die bequemste zu sein. Ferner meine ich, dass es keinen Zweck hat, alle diese einfachen, obwohl langen Rechnungen hier anzugeben; vielmehr werde ich mich auf die Angabe der Resultate und einiger speziellen Bemerkungen beschränken.

24. Die Gaussische Biegungsinvariante niedrigster Ordnung ist von 2^{ter} Ordnung. Man bekommt sie durch Integration des Systems: (N° 12 (α_2))

$$1)\quad E\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial G} + E_{10}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + (F_{10} + E_{01})\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + (2F_{01} + G_{10})\frac{\partial f}{\partial G_{01}} + E_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} = 0,$$

$$4)\quad G\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial E} + G_{01}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + (F_{01} + G_{10})\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + (2F_{10} + E_{01})\frac{\partial f}{\partial E_{10}} + G_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} = 0,$$

$$2)\quad 2E\frac{\partial f}{\partial E} + F\frac{\partial f}{\partial F} + 2E_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 3E_{10}\frac{\partial f}{\partial E_{10}} + 2F_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + G_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} - (E_{02} - 2F_{11} + G_{20})\frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0,$$

$$3)\quad 2G\frac{\partial f}{\partial G} + F\frac{\partial f}{\partial F} + 2G_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 3G_{01}\frac{\partial f}{\partial G_{01}} + 2F_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + E_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} - (G_{20} - 2F_{11} + E_{02})\frac{\partial f}{\partial F_{11}} = 0,$$

$$
\text{(Classe 1.)}\left\{
\begin{aligned}
&E\frac{\partial f}{\partial F_{01}}+2F\frac{\partial f}{\partial G_{01}}+\frac{1}{2}E_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{11}}=0,\\
&G\frac{\partial f}{\partial F_{10}}+2F\frac{\partial f}{\partial E_{10}}+\frac{1}{2}G_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{11}}=0,\\
&2E\frac{\partial f}{\partial E_{01}}+F\frac{\partial f}{\partial F_{01}}+E\frac{\partial f}{\partial F_{10}}+2F\frac{\partial f}{\partial G_{10}}-E_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{11}}=0,\\
&2G\frac{\partial f}{\partial G_{10}}+F\frac{\partial f}{\partial F_{10}}+G\frac{\partial f}{\partial F_{01}}+2F\frac{\partial f}{\partial E_{01}}-G_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{11}}=0,\\
&2E\frac{\partial f}{\partial E_{10}}+F\frac{\partial f}{\partial F_{10}}+\left(F_{01}-\frac{1}{2}G_{10}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{11}}=0,\\
&2G\frac{\partial f}{\partial G_{01}}+F\frac{\partial f}{\partial F_{01}}+\left(F_{10}-\frac{1}{2}E_{01}\right)\frac{\partial f}{\partial F_{11}}=0,
\end{aligned}\right.
$$

$$
\text{(Classe 2.)}\qquad \frac{\partial f}{\partial F_{11}}+2\frac{\partial f}{\partial E_{02}}=0,\qquad \frac{\partial f}{\partial F_{11}}+2\frac{\partial f}{\partial G_{20}}=0.
$$

Wir haben in N° 12 bewiesen, dass von den 10 ersten Gleichungen nur 9 von einander unabhängig sind; demnach können wir eine dieser Gleichungen bei der Integration weglassen. Dieser Umstand erlaubt uns, das System ohne Weiteres auf ein System des Satzes VII zurückführen; zu dem Zwecke lassen wir die Gleichung 4) weg. Indem wir zuerst die Gleichungen der Classe 2, dann der Classe 1 und schliesslich die Gleichungen 1), 2), 3) nach einander integrieren, bekommen wir die einzige Lösung:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4(EG-F^2)^2}\{&E(E_{01}G_{01}-2F_{10}G_{01}+G_{10}^2)\\
&+F(E_{10}G_{01}-E_{01}G_{10}-2E_{01}F_{01}+4F_{10}F_{01}-2F_{10}G_{10})\\
&+G(E_{10}G_{10}-2E_{10}F_{01}+E_{01}^2)-2(EG-F^2)(E_{02}-2F_{11}+G_{20})\}.
\end{aligned}
$$

Das ist das *Gaussische Krümmungsmass,* deren Invarianz bei der Biegung der Fläche Gauss in *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (XI, XII) bewiesen hat. Nach der Gaussischen Schreibweise haben wir:

$$4(EG-F^2)^2K = E\left[\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2\right]$$

$$+ F\left[\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q} + 4\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p}\right]$$

$$+ G\left[\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} + \left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right] - 2(EG-F^2)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial p\partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right],$$

wo K das Krümmungsmass bezeichnet.

25. Jetzt wollen wir gleichzeitig die Biegungsinvarianten $\Delta\varphi$, $\theta(\varphi\psi)$, und $I(\varphi y')$, deren Existenz wir in N° 18 und 20 bewiesen haben, wirklich aufstellen. Zu dem Zwecke werden wir die Gleichungen der ersten erweiterten allgemeinen Gruppe integrieren, indem wir in (23) $m = 2$, $\varphi^1 = \varphi$ und $\varphi^2 = \psi$ annehmen. Wir haben die Gleichungen:

$$1)\quad E\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial G} + \varphi_{10}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + \psi_{10}\frac{\partial f}{\partial \psi_{01}} + y'^2\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$4)\quad G\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial E} + \varphi_{01}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + \psi_{01}\frac{\partial f}{\partial \psi_{10}} - \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$2)\quad 2E\frac{\partial f}{\partial E} + F\frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{10}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + \psi_{10}\frac{\partial f}{\partial \psi_{10}} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$3)\quad 2G\frac{\partial f}{\partial G} + F\frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{01}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + \psi_{01}\frac{\partial f}{\partial \psi_{01}} - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Integriert man diese Gleichuugen in der Reihenfolge 1), 2), 3), 4), so ergeben sich folgende Lösungen:

$$\Delta\varphi = \frac{E\varphi_{01}^2 - 2F\varphi_{01}\varphi_{10} + G\varphi_{10}^2}{EG-F^2}, \qquad \Delta\psi = \frac{E\psi_{01}^2 - 2F\psi_{01}\psi_{10} + G\psi_{10}^2}{EG-F^2},$$

$$\nabla\varphi\psi = \frac{E\varphi_{01}\psi_{01} - F(\varphi_{01}\psi_{10} + \varphi_{10}\psi_{01}) + G\varphi_{10}\psi_{10}}{EG-F^2}, \qquad I(\varphi y') = \frac{\varphi_{10} + y'\varphi_{01}}{\sqrt{E + 2Fy' + Gy'^2}}.$$ [1]

[1] Die Gleichungen 1), 2), 3) haben 5 gemeinsame Lösungen:

$$c_1 = \frac{\varphi_{10}}{\sqrt{E}}, \quad c_2 = \frac{\psi_{10}}{\sqrt{E}}, \quad c_3 = \frac{E\varphi_{01} - F\varphi_{10}}{\sqrt{E(EG-F^2)}}, \quad c_4 = \frac{E\psi_{01} - F\psi_{10}}{\sqrt{E(EG-F^2)}}, \quad c_5 = \frac{Fy' + E}{y'\sqrt{EG-F^2}}.$$

Unsere Function $\theta(\varphi\psi)$ ergiebt sich als Folge der Lösungen $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ und $\nabla\varphi\psi$; wir haben nämlich:

$$\theta(\varphi\psi) = \sqrt{\Delta\varphi . \Delta\psi - (\nabla\varphi\psi)^2} = \frac{\varphi_{10}\psi_{01} - \varphi_{01}\psi_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Indem wir also $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$ und $\theta(\varphi\psi)$ als wesentliche Biegungsinvarianten betrachten, so wird $\nabla\varphi\psi$ eine Folge von ihnen, also unwesentlich. Die Biegungsinvarianten $\Delta\varphi$, $\theta(\varphi\psi)$ und $\nabla\varphi\psi$ sind von Herrn Beltrami in *Ricerche di analisi applicata alla Geometria* (XIV) (Giornale di Matematiche, Bände II und III) aufgestellt worden. Herr Beltrami berechnet natürlich diese Ausdrücke in einer ganz anderen Weise, als es hier geschehen ist. $\Delta\varphi$ nennt er *Differentialparameter* 1ter *Ordnung.*

In N° 18 haben wir bewiesen, dass wenn mehrere invariante Functionen φ auftreten, einige von den Ausdrücken θ nur Folgen der übrigen und der Parameter Δ sind. Nehmen wir drei Functionen: φ, ψ, σ, so haben wir:

$$\Delta\varphi = \frac{E\varphi_{01}^2 - 2F\varphi_{01}\varphi_{10} + G\varphi_{10}^2}{EG - F^2}, \qquad \Delta\psi = \frac{E\psi_{01}^2 - 2F\psi_{01}\psi_{10} + G\psi_{10}^2}{EG - F^2},$$

$$\Delta\sigma = \frac{E\sigma_{01}^2 - 2F\sigma_{01}\sigma_{10} + G\sigma_{10}^2}{EG - F^2},$$

$$\theta(\psi\sigma) = \frac{\psi_{10}\sigma_{01} - \psi_{01}\sigma_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad \theta(\sigma\varphi) = \frac{\sigma_{10}\varphi_{01} - \sigma_{01}\varphi_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}, \qquad \theta(\varphi\psi) = \frac{\varphi_{10}\psi_{01} - \varphi_{01}\psi_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Zwischen diesen 6 Grössen soll eine Identität bestehen. Wenn wir aus

---

Verfährt man, wie im Theorem V angedeutet ist, so erhält man aus 4) die Gleichung:

$$c_2\frac{\partial f}{\partial c_1} + c_4\frac{\partial f}{\partial c_2} - c_1\frac{\partial f}{\partial c_3} - c_3\frac{\partial f}{\partial c_4} + (1 + c_5^2)\frac{\partial f}{\partial c_5} = 0,$$

welche schliesslich folgende 4 unabhängige Lösungen giebt:

$$c_1^2 + c_3^2 = \Delta\varphi, \qquad c_2^2 + c_4^2 = \Delta\psi, \qquad c_1c_2 + c_3c_4 = \nabla\varphi\psi, \qquad \frac{c_2 + c_1c_5}{\sqrt{1 + c_5^2}} = I(\varphi y').$$

($I(\varphi y')$ ist keine neue Biegungsinvariante; man sieht leicht, dass sie mit dem Ausdrucke identisch ist, den Herr Darboux mit $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ bezeichnet. *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Troisième partie, p. 195.)

den zwei letzten Gleichungen φ_{10} und φ_{01} bestimmen und diese Werte in die ersten der sechs Gleichungen einsetzen, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit die Identität:

$$(\Delta\varphi)^2\theta^4(\psi\sigma) + (\Delta\psi)^2\theta^4(\sigma\varphi) + (\Delta\sigma)^2\theta^4(\varphi\psi) + 4\theta^2(\psi\sigma)\theta^2(\sigma\varphi)\theta^2(\varphi\psi)$$

$$-2\Delta\psi\Delta\sigma\theta^2(\sigma\varphi)\theta^2(\varphi\psi) - 2\Delta\sigma\Delta\varphi\theta^2(\varphi\psi)\theta^2(\psi\sigma) - 2\Delta\varphi\Delta\psi\theta^2(\psi\sigma)\theta^2(\sigma\varphi) \doteq 0.$$

Natürlich werden wir, wenn mehr als 3 invariante Functionen auftreten, mehrere solche Identitäten aufstellen können. Diese Identität controlliert unsere frühere Behauptung.

In derselben Weise ergiebt sich aus den Entwicklungen in N° 20, dass zwischen:

$$\Delta\varphi\,,\ \Delta\psi\,,\ \theta(\varphi\psi)\,,\ I(\varphi y')\,,\ I(\psi y')$$

eine Identität bestehen muss. In der That, wir haben:

$$\sqrt{\Delta\varphi - I^2(\varphi y')} = \frac{(E + Fy')\varphi_{10} - (F + Gy')\varphi_{01}}{\sqrt{EG - F^2}\sqrt{E + 2Fy' + Gy'^2}},$$

und es ist leicht zu verificieren, dass

$$I(\varphi y')\sqrt{\Delta\psi - I^2(\psi y')} - I(\psi y')\sqrt{\Delta\varphi - I^2(\varphi y')} = \frac{\varphi_{10}\psi_{01} - \varphi_{01}\psi_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}$$

ist; es besteht also die Identität:

$$I(\varphi y')\sqrt{\Delta\psi - I^2(\psi y')} - I(\psi y')\sqrt{\Delta\varphi - I^2(\varphi y')} = \theta(\varphi\psi).$$

Wir müssen hier noch hervorheben, dass man die in Rede stehenden Biegungsinvarianten gewöhnlich in anderer Form schreibt, als wir es gethan haben, man setzt nämlich statt $\varphi_{10}, \varphi_{01}$ bez. $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}$; für uns war die kürzere Schreibweise bequemer.

26. Wir gehen jetzt zur Berechnung der Beltramischen Biegungsinvarianten 2^{ter} Ordnung mit einer Function φ über.

Aus (18) ergeben sich dafür folgende Gleichungen:

$$1)\quad E\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial G} + E_{10}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + (F_{10} + E_{01})\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + (2F_{01} + G_{10})\frac{\partial f}{\partial G_{01}}$$
$$+ E_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + \varphi_{10}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + 2\varphi_{11}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{02}} + \varphi_{20}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} = 0,$$

$$4)\quad G\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial E} + G_{01}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + (F_{01} + G_{10})\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + (2F_{10} + E_{01})\frac{\partial f}{\partial E_{10}}$$
$$+ G_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + \varphi_{01}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + 2\varphi_{11}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{20}} + \varphi_{02}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} = 0,$$

$$2)\quad 2E\frac{\partial f}{\partial E} + F\frac{\partial f}{\partial F} + 2E_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 3E_{10}\frac{\partial f}{\partial E_{10}} + 2F_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}}$$
$$+ G_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + \varphi_{10}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + \varphi_{11}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} + 2\varphi_{20}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{20}} = 0.$$

$$3)\quad 2G\frac{\partial f}{\partial G} + F\frac{\partial f}{\partial F} + 2G_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 3G_{01}\frac{\partial f}{\partial G_{01}} + 2F_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}}$$
$$+ E_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + \varphi_{01}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + \varphi_{11}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} + 2\varphi_{02}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{02}} = 0,$$

$$\text{(Classe 1.)}\begin{cases} E\dfrac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F\dfrac{\partial f}{\partial G_{01}} + \varphi_{10}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{02}} = 0, \\[2ex] G\dfrac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F\dfrac{\partial f}{\partial E_{10}} + \varphi_{01}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{20}} = 0, \\[2ex] 2E\dfrac{\partial f}{\partial E_{01}} + F\dfrac{\partial f}{\partial F_{01}} + E\dfrac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F\dfrac{\partial f}{\partial G_{10}} + \varphi_{10}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} = 0, \\[2ex] 2G\dfrac{\partial f}{\partial G_{10}} + F\dfrac{\partial f}{\partial F_{10}} + G\dfrac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F\dfrac{\partial f}{\partial E_{01}} + \varphi_{01}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{11}} = 0, \\[2ex] 2E\dfrac{\partial f}{\partial E_{10}} + F\dfrac{\partial f}{\partial F_{10}} + \varphi_{10}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{20}} = 0, \\[2ex] 2G\dfrac{\partial f}{\partial G_{01}} + F\dfrac{\partial f}{\partial F_{01}} + \varphi_{01}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi_{02}} = 0. \end{cases}$$

Ich integriere zuerst die Gleichungen der Classe 1; dann die Gleichungen der Classe 0 in der Reihenfolge 1), 2), 3), 4). Bezeichnet man:

$$a = 2(EG - F^2)\varphi_{20} + (E_{01} - 2F_{10})(E\varphi_{01} - F\varphi_{10}) - E_{10}(G\varphi_{10} - F\varphi_{01}),$$

$$b = 2(EG - F^2)\varphi_{11} - G_{10}(E\varphi_{01} - F\varphi_{10}) - E_{01}(G\varphi_{10} - F\varphi_{01}),$$

$$c = 2(EG - F^2)\varphi_{02} - G_{01}(E\varphi_{01} - F\varphi_{10}) + (G_{10} - 2F_{01})(G\varphi_{10} - F\varphi_{01}),$$

so bekommt man folgende Lösungen des Systems:

$$\Delta_2\varphi = \frac{Ec - 2Fb + Ga}{2(EG - F^2)^2},$$

$$\Delta_2'\varphi = \frac{1}{(EG - F^2)^3}\{[(E\varphi_{01} - F\varphi_{10})^2 - (EG - F^2)\varphi_{10}^2]c$$
$$-2(EF\varphi_{01}^2 - 2EG\varphi_{01}\varphi_{10} + FG\varphi_{10}^2)b + [(G\varphi_{10} - F\varphi_{01})^2 - (EG - F^2)\varphi_{01}^2]a\},$$

$$\Delta_2''\varphi = \frac{ac - b^2}{(EG - F^2)^3}$$ [1]

---

[1] Die Grössen a, b, c sind Lösungen der Gleichungen der Classe 1 und ergeben sich ohne Schwierigkeit. Führt man diese Integrale a, b, c in die Gleichungen 1), 2), 3), 4) ein, so erhält man das System:

$$1)\qquad E\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial G} + \varphi_{10}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + a\frac{\partial f}{\partial b} + 2b\frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

$$2)\qquad 2E\frac{\partial f}{\partial E} + F\frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{10}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + 4a\frac{\partial f}{\partial a} + 3b\frac{\partial f}{\partial b} + 2c\frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

$$3)\qquad 2G\frac{\partial f}{\partial G} + F\frac{\partial f}{\partial F} + \varphi_{01}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{01}} + 2a\frac{\partial f}{\partial a} + 3b\frac{\partial f}{\partial b} + 4c\frac{\partial f}{\partial c} = 0,$$

$$4)\qquad G\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial E} + \varphi_{01}\frac{\partial f}{\partial \varphi_{10}} + 2b\frac{\partial f}{\partial a} + c\frac{\partial f}{\partial b} = 0.$$

Die Gleichungen 1), 2), 3) ergeben sehr leicht die Lösungen:

$$\gamma_1 = \frac{\varphi_{10}}{\sqrt{E}},\qquad \gamma_2 = \frac{E\varphi_{01} - F\varphi_{10}}{\sqrt{E(EG - F^2)}},\qquad \gamma_3 = \frac{ac - b^2}{(EG - F^2)^3},$$

$$\gamma_4 = \frac{a}{E(EG - F^2)},\qquad \gamma_5 = \frac{Eb - Fa}{E(\sqrt{EG - F^2})^3};$$

setzt man diese Lösungen in 4) ein, so findet man erstens, dass $\gamma_3 = \Delta_2''\varphi$ eine Biegungsinvariante ist, zweitens die Gleichung: $\gamma_2\frac{\partial f}{\partial \gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial f}{\partial \gamma_2} + 2\gamma_5\frac{\partial f}{\partial \gamma_4} + \frac{1}{\gamma_4}(\gamma_3 + \gamma_5^2 - \gamma_4^2)\frac{\partial f}{\partial \gamma_5} = 0.$

und endlich die Biegungsinvariante 1ter Ordnung $\Delta\varphi$. Setzt man in $\Delta_2\varphi$ die Ausdrücke a, b, c ein, und ordnet man die Glieder zweckmässig, so ergiebt sich ohne Schwierigkeit:

$$\begin{aligned}\Delta_2\varphi = \frac{1}{(\sqrt{EG - F^2})^3}\Big\{&(G\varphi_{20} - F\varphi_{11} + G_{10}\varphi_{10} - F_{10}\varphi_{01})\sqrt{EG - F^2} \\ &- \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}(GE_{10} + EG_{10} - 2FF_{10})(G\varphi_{10} - F\varphi_{01}) \\ &+ (E\varphi_{02} - F\varphi_{11} + E_{01}\varphi_{01} - F_{01}\varphi_{01})\sqrt{EG - F^2} \\ &- \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}}(EG_{01} + GE_{01} - 2FF_{10})(E\varphi_{01} - F\varphi_{10})\Big\};\end{aligned}$$

daraus resultiert aber unmittelbar:

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\left(\frac{G\varphi_{10} - F\varphi_{01}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)_{10} + \left(\frac{E\varphi_{01} - F\varphi_{10}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)_{01}\right\}.$$

Das ist der Beltramische *Differentialparameter* 2ter *Ordnung;* in gewöhnlicher Weise geschrieben lautet er:

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - F\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\right\},$$

wo die Veränderlichen x, y durch u, v ersetzt sind.

27. Endlich gehen wir zur Berechnung der Mindingschen Biegungs-

---

Daraus ergiebt sich: 1) die Lösung: $\Delta\varphi = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$; 2) die Gleichung:

$$2\gamma_5\frac{d\gamma_5}{d\gamma_4} - \frac{\gamma_3 + \gamma_5^2}{\gamma_4} + \gamma_4 = 0,$$

welche sich vermöge der Substitution $\gamma_3 + \gamma_5^2 = z$ auf eine lineare bringen lässt und die Lösung $\Delta_2\varphi = \dfrac{\gamma_3 + \gamma_4^2 + \gamma_5^2}{2\gamma_4}$ ergiebt, und endlich 3) die Gleichung:

$$\frac{2d\gamma_2}{\sqrt{\Delta\varphi - \gamma_2^2}} + \frac{d\gamma_4}{\sqrt{\gamma_4(2\Delta_2\varphi - \gamma_4) - \gamma_3}} = 0,$$

woraus wir die Biegungsinvariante $\Delta_2'\varphi = 2\gamma_1\gamma_2\gamma_5 + (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)(\gamma_4 - \Delta_2\varphi)$ bekommen.

invariante 2ter Ordnung über. Nach (6) und (21) ergeben sich für diese Biegungsinvariante folgende Gleichungen:

$$1)\quad E\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial G} + E_{10}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + (F_{10} + E_{01})\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + (2F_{01} + G_{10})\frac{\partial f}{\partial G_{01}}$$
$$+ E_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + y'^2\frac{\partial f}{\partial y'} + 3y'y''\frac{\partial f}{\partial y''} = 0,$$

$$4)\quad G\frac{\partial f}{\partial F} + 2F\frac{\partial f}{\partial E} + G_{01}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + (F_{01} + G_{10})\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + (2F_{10} + E_{01})\frac{\partial f}{\partial E_{10}}$$
$$+ G_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} - \frac{\partial f}{\partial y'} = 0,$$

$$2)\quad 2E\frac{\partial f}{\partial E} + F\frac{\partial f}{\partial F} + 2E_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{01}} + F_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}} + 3E_{10}\frac{\partial f}{\partial E_{10}} + 2F_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}}$$
$$+ G_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + y'\frac{\partial f}{\partial y'} + 2y''\frac{\partial f}{\partial y''} = 0,$$

$$3)\quad 2G\frac{\partial f}{\partial G} + F\frac{\partial f}{\partial F} + 2G_{10}\frac{\partial f}{\partial G_{10}} + F_{10}\frac{\partial f}{\partial F_{10}} + 3G_{01}\frac{\partial f}{\partial G_{01}} + 2F_{01}\frac{\partial f}{\partial F_{01}}$$
$$+ E_{01}\frac{\partial f}{\partial E_{10}} - y'\frac{\partial f}{\partial y'} - y''\frac{\partial f}{\partial y''} = 0,$$

$$(\text{Classe } 1.)\begin{cases} E\dfrac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F\dfrac{\partial f}{\partial G_{01}} + y'^3\dfrac{\partial f}{\partial y''} = 0, \\ G\dfrac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F\dfrac{\partial f}{\partial E_{10}} - \dfrac{\partial f}{\partial y''} = 0, \\ 2E\dfrac{\partial f}{\partial E_{01}} + F\dfrac{\partial f}{\partial F_{01}} + E\dfrac{\partial f}{\partial F_{10}} + 2F\dfrac{\partial f}{\partial G_{10}} + 2y'^2\dfrac{\partial f}{\partial y''} = 0, \\ 2G\dfrac{\partial f}{\partial G_{10}} + F\dfrac{\partial f}{\partial F_{10}} + G\dfrac{\partial f}{\partial F_{01}} + 2F\dfrac{\partial f}{\partial E_{01}} - 2y'\dfrac{\partial f}{\partial y''} = 0, \\ 2E\dfrac{\partial f}{\partial E_{10}} + F\dfrac{\partial f}{\partial F_{10}} + y'\dfrac{\partial f}{\partial y''} = 0, \\ 2G\dfrac{\partial f}{\partial G_{01}} + F\dfrac{\partial f}{\partial F_{01}} - y'^2\dfrac{\partial f}{\partial y''} = 0. \end{cases}$$

Ich integriere zuerst alle Gleichungen der Classe 1, dann die Gleichungen der Classe 0 in der Reihenfolge 1), 2), 3), 4). Es ergiebt sich die Biegungsinvariante:

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}(\sqrt{E+2Fy'+Gy'^2})^3}\Big\{\Big(EF_{10}-\frac{1}{2}EE_{01}-\frac{1}{2}FE_{10}\Big)$$

$$+\Big(EG_{10}+FF_{10}-\frac{3}{2}FE_{01}-\frac{1}{2}GE_{10}\Big)y'-\Big(GE_{01}+FF_{01}-\frac{3}{2}FG_{10}-\frac{1}{2}EG_{01}\Big)y'^2$$

$$-\Big(GF_{01}-\frac{1}{2}GG_{10}-\frac{1}{2}FG_{01}\Big)y'^3+(EG-F^2)y''\Big\}.$$ [1]

Dieser Ausdruck ist die von Minding (Crelles Journal, Band 6: *Bemerkung über die Abwickelung krummer Linien von Flächen*) berechnete *geodätische Krümmung*. Ordnet man hier die Glieder zweckmässig und setzt statt x, y bez. p, q, so bekommt man den Mindingschen Ausdruck:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}(\sqrt{Edp^2+2Fdpdq+Gdq^2})^3}\Big\{\Big[E\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq+\frac{\partial F}{\partial p}dp-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}dp\Big)-\frac{1}{2}FdE\Big]dp^2$$

$$+\Big[\frac{1}{2}FdG-G\Big(\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}dp+\frac{\partial F}{\partial q}dq-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq\Big)\Big]dq^2$$

$$+\Big[\frac{1}{2}EdG-\frac{1}{2}GdE+F\Big(\frac{\partial F}{\partial p}dp-\frac{\partial F}{\partial q}dq+\frac{\partial G}{\partial p}dq-\frac{\partial E}{\partial q}dp\Big)\Big]dpdq$$

$$+(EG-F^2)(dpd^2q-dqd^2p)\Big\}.$$

---

[1] Der Ausdruck, welcher in Klammern $\{\}$ steht, ist die einzige gemeinsame Lösung der Gleichungen der Classe 1. Bezeichnet man diesen Ausdruck mit c und setzt man ihn in 1), 2), 3), 4) ein, so ergiebt sich das System:

$$1)\quad E\frac{\partial f}{\partial F}+2F\frac{\partial f}{\partial G}+y'^2\frac{\partial f}{\partial y'}+3y'c\frac{\partial f}{\partial c}=0,\qquad 2)\quad 2E\frac{\partial f}{\partial E}+F\frac{\partial f}{\partial F}+y'\frac{\partial f}{\partial y'}+4c\frac{\partial f}{\partial c}=0,$$

$$3)\quad 2G\frac{\partial f}{\partial G}+F\frac{\partial f}{\partial F}-y'\frac{\partial f}{\partial y'}+c\frac{\partial f}{\partial c}=0,\qquad 4)\quad G\frac{\partial f}{\partial F}+2F\frac{\partial f}{\partial E}-\frac{\partial f}{\partial y'}=0.$$

Die Gleichungen 1), 2), 3) ergeben zwei gemeinsame Lösungen: $\alpha=\frac{E+Fy'}{y'\sqrt{EG-F^2}}$ und $\beta=\frac{cE^{3/2}}{y'^3(EG-F^2)^2}$; demnach nimmt die Gleichung 4) die Form: $(1+\alpha^2)\frac{\partial f}{\partial\alpha}+3\alpha\beta\frac{\partial f}{\partial\beta}=0$ an und liefert das Integral $C=\frac{\beta}{(1+\alpha^2)^{3/2}}=\frac{c}{\sqrt{EG-F^2}(\sqrt{E+2Fy'+Gy'^2})^3}$.

28. Die Berechnung der Biegungsinvarianten durch Integration vollständiger Systeme ist aber sehr umständlich. Es giebt zwar ein anderes Mittel: hat man nämlich eine gewisse Biegungsinvariante, welche invariante Functionen enthält, und setzt man in diese Biegungsinvariante statt dieser invarianten Functionen ebenfalls Biegungsinvarianten ein, so bekommt man offenbar auch eine Biegungsinvariante von höherer Ordnung als diejenigen, welche zu ihrer Berechnung gebraucht wurden. Dies hat schon Herr Beltrami bemerkt in Bezug auf seine Symbole $\Delta\varphi$, $\theta(\varphi\psi)$, $\Delta_2\varphi$. Diese Methode der Berechnung von Biegungsinvarianten wird aber nur dann mit vollständigem Rechte gebraucht werden können, wenn man weiss, wie man diese Operationen dirigieren muss, um *alle* wesentlichen Biegungsinvarianten zu erhalten. Mir ist es nicht gelungen, irgend ein Resultat in dieser Richtung zu gewinnen.

Ich habe vielmehr im Allgemeinen nur den folgenden Satz anzumerken:

»Setzt man in einer Gaussischen Biegungsinvariante statt E_{ik}, F_{ik}, G_{ik} bez. G_{ki}, F_{ki}, E_{ki} und in einer Beltramischen statt E_{ik}, F_{ik}, G_{ik}, φ^s_{ik} bez. G_{ki}, F_{ki}, E_{ki}, φ^s_{ki}, so bekommt man wieder eine Gaussische resp. Beltramische Biegungsinvariante.»

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der Sätze III und V. Die in den letzten Artikeln berechneten Gaussischen und Beltramischen Biegungsinvarianten gehen bei solcher Vertauschung in sich selbst über.

Für die Mindingschen und allgemeinen Biegungsinvarianten gilt ein analoger Satz offenbar nicht.

Göttingen, im März 1891.

SUR LES MAXIMA ET LES MINIMA DES INTÉGRALES DOUBLES

PAR

GUSTAF KOBB

À STOCKHOLM.

Dans ses leçons sur le Calcul des Variations M. WEIERSTRASS a exposé une nouvelle méthode pour la recherche des maxima et des minima des intégrales simples, qui est aussi élégante que rigoureuse. Dans ce mémoire j'ai voulu essayer d'appliquer cette méthode aux intégrales doubles, en me fondant sur les admirables travaux de M. PICARD, concernant la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. Je me borne comme M. WEIERSTRASS à considérer le cas où la fonction sous les signes sommes ne contient que des dérivées du premier ordre.

Il sera facile de voir que la méthode que je vais exposer peut être étendue aux intégrales multiples.

Une méthode analogue a aussi été employée par M. SCHWARZ dans ses beaux travaux sur les surfaces minima.[1]

[1] *Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung* von H. A. SCHWARZ. Ges. Abhand. I Band.

I Partie.

Sur la première variation.

Soit

$$F(x\,,y\,,z\,,x',y',z',x'',y'',z'')$$

une fonction régulaire des 9 variables $x\,,y\,,z$

$$x'=\frac{\partial x}{\partial u},\qquad y'=\frac{\partial y}{\partial u},\qquad z'=\frac{\partial z}{\partial u},\qquad x''=\frac{\partial x}{\partial v},\qquad y''=\frac{\partial y}{\partial v},\qquad z''=\frac{\partial z}{\partial v}$$

qui, par rapport aux 6 dernières variables, soit bien définie pour toutes valeurs réelles et, par rapport aux 3 premières, au moins pour des valeurs entre certaines limites.

Considérons l'intégrale double

$$I=\iint F(x\,,y\,,z\,,x',y',z',x'',y'',z'')\,du\,dv \tag{1}$$

l'intégration étant étendue à tous les points dans l'intérieur d'une certaine courbe fermée

$$F(u\,,v)=0$$

et supposons donnée une succession de valeurs de x,y,z sur cette courbe, nous nous proposons de déterminer x,y,z comme des fonctions uniformes de u et v, de manière que cette intégrale soit un maximum ou un minimum, et que x,y,z prennent sur la courbe des limites les valeurs données.

Nous pouvons aussi formuler notre question de la maniére suivante: »Determinez une surface

$$x=x(u\,,v),\qquad y=y(u\,,v),\qquad z=z(u\,,v)$$

de façon que l'intégrale (1) étendue sur cette surface, en cas d'un maximum, soit plus grande, et en cas d'un minimum, soit plus petite que la même intégrale, étendue sur toute autre surface ayant les mêmes limites, et qui n'est qu'une variation infiniment petite de celle-là.»

Nous disons avec M. Weierstrass que deux surfaces sont des variations infiniment petites l'une de l'autre, si à chaque point de la première correspond un seul point de l'autre, et vice-versa, et si la distance entre deux points correspondants est infiniment petite.

De cette dernière forme de notre problème nous pouvons déduire une propriété importante de la fonction F. Nous observons que la valeur de l'intégrale (1) dépend seulement de la forme de la surface et pas du tout de la manière dont nous nous sommes servis pour exprimer les coordonnées x, y, z.

Supposons que u et v soient des fonctions uniformes de u_1 et v_1 et aussi que u_1 et v_1 soient des fonctions uniformes de u et v; si nous remplaçons les variables u et v par u_1 et v_1, l'intégrale (1) doit conserver la même valeur. Ainsi en appellant C la courbe

$$F(u, v) = 0$$

et C' celle, que devient C en remplaçant u et v par u_1 et v_1 on doit avoir

$$(2) \qquad \iint\limits_{C} F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')\,du\,dv$$

$$= \iint\limits_{C'} F(x, y, z, x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1'')\,du_1\,dv_1$$

où

$$x_1' = \frac{\partial x}{\partial u_1}, \qquad y_1' = \frac{\partial y}{\partial u_1}, \qquad z_1' = \frac{\partial z}{\partial u_1},$$

$$x_1'' = \frac{\partial x}{\partial v_1}, \qquad y_1'' = \frac{\partial y}{\partial v_1}, \qquad z_1'' = \frac{\partial z}{\partial v_1}.$$

La relation la plus générale entre u et v et u_1 et v_1 serait

$$\begin{aligned} u &= ku_1 + k_1v_1 + (u_1, v_1)_2 + \cdots \\ v &= lu_1 + l_1v_1 + (u_1, v_1)_2 + \cdots \end{aligned} \qquad kl_1 - k_1 l \gtrless 0$$

mais il suffit de considérer les termes linéaires.

Il faut maintenant exprimer $x', y', z', x'', y'', z''$ par $x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1''$. On a

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda_1 u + \varkappa_1 v, \\ v_1 &= \lambda u + \varkappa v, \end{aligned} \qquad \varkappa\lambda_1 - \lambda\varkappa_1 = (kl_1 - k_1 l)^{-1}$$

et par conséquent

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \lambda_1 + \frac{\partial x}{\partial v_1} \cdot \lambda = \lambda_1 x_1' + \lambda x_1'',$$

$$x'' = \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdot \varkappa_1 + \frac{\partial x}{\partial v_1} \cdot \varkappa = \varkappa_1 x_1' + \varkappa x_1''$$

etcet.

Considérons maintenant le premier membre de (2) comme fonction de u_1 et v_1, nous aurons

$$I = (kl_1 - k_1 l) \iint_C F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'') du_1 dv_1$$

ou en exprimant $x', y', z', x'', y'', z''$ par $x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1''$

$$I = \frac{1}{\varkappa\lambda_1 - \varkappa_1\lambda} \iint_C F(x, y, z, \lambda_1 x_1' + \lambda x_1'', \ldots, \varkappa_1 x_1' + \varkappa x_1'', \ldots) du_1 dv_1$$

et, par conséquent, en vertu de (2)

$$\iint_C F(x, y, z, x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1'') du_1 dv_1$$

$$= \frac{1}{\varkappa\lambda_1 - \varkappa_1\lambda} \iint_C F(x, y, z, \lambda_1 x_1' + \lambda x_1'', \ldots, \varkappa_1 x_1' + \varkappa x_1'', \ldots) du_1 dv_1.$$

Pour que cette égalité ait lieu, il faut et il suffit que les éléments des deux intégrales deviennent égaux. Ainsi en supprimant les accents

$$(3) \qquad (\varkappa\lambda_1 - \varkappa_1\lambda) F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')$$
$$= F(x, y, z, \lambda_1 x' + \lambda x'', \ldots, \varkappa_1 x' + \varkappa x'', \ldots).$$

Cette relation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de $\lambda, \lambda_1, \varkappa, \varkappa_1$, qui remplissent la condition

$$\varkappa\lambda_1 - \varkappa_1\lambda \gtrless 0.$$

Supposons donc

$$\lambda_1 = 1 + \tau_1, \qquad \varkappa_1 = \varepsilon_1,$$
$$\lambda = \tau, \qquad \varkappa = 1 + \varepsilon$$

et développons les deux membres de (3) suivant des puissances de $\tau, \tau_1, \varepsilon, \varepsilon_1$, nous aurons en égalant les coefficients de $\tau, \tau_1, \varepsilon, \varepsilon_1$ les relations importantes

$$
(4) \qquad \begin{cases}
F = x' \dfrac{\partial F}{\partial x'} + y' \dfrac{\partial F}{\partial y'} + z' \dfrac{\partial F}{\partial z'}, \\[2ex]
0 = x'' \dfrac{\partial F}{\partial x'} + y'' \dfrac{\partial F}{\partial y'} + z'' \dfrac{\partial F}{\partial z'}, \\[2ex]
0 = x' \dfrac{\partial F}{\partial x''} + y' \dfrac{\partial F}{\partial y''} + z' \dfrac{\partial F}{\partial z''}, \\[2ex]
F = x'' \dfrac{\partial F}{\partial x''} + y'' \dfrac{\partial F}{\partial y''} + z'' \dfrac{\partial F}{\partial z''}.
\end{cases}
$$

Ces relations joueront un rôle capital dans toute la théorie suivante.

Reprenons l'étude de l'intégrale (1) et cherchons la variation, que subit sa valeur, si nous étendons l'intégration sur une nouvelle surface déterminée par les coordonnées

$$\bar{x} = x + \xi, \qquad \bar{y} = y + \eta, \qquad \bar{z} = z + \zeta$$

où nous supposons d'abord ξ, η, ζ des fonctions régulaires des variables u et v. La différence entre les deux valeurs de l'intégrale devient

$$\Delta I = \iint\limits_C \Big\{ F\Big(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, x' + \frac{\partial \xi}{\partial u}, \ldots, x'' + \frac{\partial \xi}{\partial v}, \ldots\Big)$$
$$- F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')\Big\} du\,dv$$

et la première variation

$$\delta I = \iint\limits_C \Big\{ \frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta + \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x''}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \ldots \Big\} du\,dv.$$

On a ensuite les identités

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big(\xi \frac{\partial F}{\partial x'}\Big) = \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \xi \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big),$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\Big(\xi \frac{\partial F}{\partial x''}\Big) = \frac{\partial F}{\partial x''}\frac{\partial \xi}{\partial v} + \xi \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial F}{\partial x''}\Big)$$

etcet.

Alors en intégrant par partie, nous aurons

$$(5)\quad \delta I = \iint\limits_{C} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)\right]\xi + \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\eta \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)\right]\zeta \right\} du\,dv$$

$$+ \int\limits_{C} \left\{ \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z'}\right] dv - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x''} + \eta \frac{\partial F}{\partial y''} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z''}\right] du \right\}.$$

Dans la dernière intégrale, l'intégration est effectuée le long du contour C. Nous avons supposé que les limites de l'intégrale (1), ainsi que les valeurs de x, y, z aux limites soient determinées. Donc les variations s'annulent aux limites; l'intégrale simple disparaît, et la première variation se réduit à l'intégrale double.

Nous allons transformer celle-ci, mais dans ce but, il faut étudier les équations (4).

En différentiant ces équations par rapport à $x' y' z'\ x'' y'' z''$ nous aurons:

$$\left\{\begin{aligned}
0 &= x' \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'}, \\
\frac{\partial F}{\partial x''} &= x' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x''} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x''}, \\
0 &= x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'}, \\
0 &= x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x''} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x''} + \frac{\partial F}{\partial x'}, \\
\frac{\partial F}{\partial x'} &= x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x'} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x'}, \\
0 &= x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x''} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x''}, \\
0 &= x' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x'} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x'} + \frac{\partial F}{\partial x''}, \\
0 &= x' \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x''} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x''},
\end{aligned}\right.$$

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y'},\\
\frac{\partial F}{\partial y''} &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y''} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y''},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y'},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y''} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y''} + \frac{\partial F}{\partial y'},\\
\frac{\partial F}{\partial y'} &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial y'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y''},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial y'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y''},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y''},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2},\\
\frac{\partial F}{\partial z''} &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z''} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z''},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z''} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z''} + \frac{\partial F}{\partial z'},\\
\frac{\partial F}{\partial z'} &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial z'},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z''} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial z'} + \frac{\partial F}{\partial z''},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z''} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Entre ces 24 équations on peut d'abord éliminer les dérivées de F du premier ordre; il reste 18 équations, qui se partagent en trois groupes de 6 équations entre les dérivées du second ordre.

$$
(7)\left\{
\begin{aligned}
&o = x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'}, \quad o = x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'},\\
&o = x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y'}, \quad o = x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y'},\\
&o = x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}, \quad o = x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2},\\
&\rule{4em}{0.4pt}\\
&o = x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''^2} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x''} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x''}, \quad o = x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''^2} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x''} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x''},\\
&o = x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y''}, \quad o = x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y''},\\
&o = x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z''} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}, \quad o = x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z''} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2},\\
&\rule{4em}{0.4pt}\\
&2x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''} + x'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x''}\right) + z'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x''}\right) = o,\\
&x'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''}\right) + 2y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y''} + z'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y''}\right) = o,\\
&x'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''}\right) + y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z''}\right) + 2z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z''} = o,\\
&2x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'} + y''\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x''} + \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right) + z''\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x''} + \frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right) = o,\\
&x''\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right) + 2y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial y'} + z''\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y''} + \frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right) = o,\\
&x''\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right) + y''\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z''} + \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}\right) + 2z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z''} = o.
\end{aligned}
\right.
$$

On observe, que les coefficients de ces systèmes sont les mêmes; seulement les dérivées sont différentes. Il suffit donc de résoudre le premier système pour que les autres s'en déduisent immédiatement.

Considérons ainsi les 6 premières équations, et éliminons entre eux les dérivées

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}.$$

On aura

$$(x'y'' - x''y')\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + (x'z'' - x''z')\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'} = 0,$$

$$(y'z'' - y''z')\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'} + (y'x'' - y''x')\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'} = 0,$$

$$(z'x'' - z''x')\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'} + (z'y'' - z''y')\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y'} = 0$$

On voit aisément que ces équations sont satisfaites en posant

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} = F_1 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'} = F_1 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'} = F_1 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}$$

où F_1 est un certain facteur commun. En substituant les valeurs de $\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}$ dans la première des équations (7), nous aurons

$$x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = -F_1\left\{y'\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z'\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\right\},$$

ou

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = F_1 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2.$$

D'une manière analogue nous trouverons

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}.$$

Ayant ainsi résolu les équations (7), nous abordons le système de très importantes formules

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = F_1 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2, &&\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = F_1 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = F_1 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}^2, &&\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} = F_1 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} = F_1 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2, &&\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'} = F_1 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x''^2} = F_2 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2, &&\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y''} = F_2 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} = F_2 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}^2, &&\frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z''} = F_2 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2} = F_2 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2, &&\frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x''} = F_2 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''} = F_3 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2, &&\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y''} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x''} = 2F_3 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y''} = F_3 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}^2, &&\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z''} + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y''} = 2F_3 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''} = F_3 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2, &&\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x''} + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z''} = 2F_3 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

F_2 et F_3 sont d'autres facteurs communs.

Reprenons maintenant notre intégrale double (5) et étudions l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right).$$

De la première des équations (4) nous tirons, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x}$$

ensuite on a, en éffectuant les différentiations,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial u}$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial x''}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''}\frac{\partial z''}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}x'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial v}$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}\frac{\partial x''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''}\frac{\partial z''}{\partial v}.$$

Suivant les définitions des quantités

$$x',\ y',\ z',\ x'',\ y'',\ z''$$

on a évidemment

$$\frac{\partial x''}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y''}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z''}{\partial u} = \frac{\partial z'}{\partial v}.$$

Ainsi

$$-\left\{\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)\right\}$$

$$= y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right) + z'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right) + x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}\frac{\partial x''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''}\frac{\partial z''}{\partial v}$$

$$+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial x'}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\frac{\partial y'}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right)\frac{\partial z'}{\partial v}.$$

Maintenant nous employons les formules (8) et substituons les valeurs de $\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}$ etc.

On aura donc,

$$-\left\{\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)+z'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)+x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}\\
&\quad+\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\left\{F_1\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial u}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial u}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial u}\right]\right.\\
&\quad+F_2\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x''}{\partial v}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y''}{\partial v}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z''}{\partial v}\right]\\
&\quad\left.+2F_3\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial v}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial v}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial v}\right]\right\}.
\end{aligned}$$

On peut montrer que la première partie de cette expression est aussi divisible par

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}.$$

En ce but, nous différentions les équations (4) par rapport à x, y, z. Nous aurons donc

$$(9)\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial F}{\partial x}=x'\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}+y'\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+z'\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}, & 0=x''\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}+y''\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+z''\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x},\\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial y}=x'\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}+y'\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}+z'\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}, & 0=x''\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}+y''\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}+z''\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y},\\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial z}=x'\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}+y'\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}+z'\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z}, & 0=x''\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}+y''\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}+z''\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z},\\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial x}=x''\dfrac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}+y''\dfrac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}+z''\dfrac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}, & 0=x'\dfrac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}+y'\dfrac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}+z'\dfrac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x},\\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial y}=x''\dfrac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}+y''\dfrac{\partial^2 F}{\partial y''\partial y}+z''\dfrac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y}, & 0=x'\dfrac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}+y'\dfrac{\partial^2 F}{\partial y''\partial y}+z'\dfrac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y},\\[2ex]
\dfrac{\partial F}{\partial z}=x''\dfrac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}+y''\dfrac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z}+z''\dfrac{\partial^2 F}{\partial z''\partial z}, & 0=x'\dfrac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}+y'\dfrac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z}+z'\dfrac{\partial^2 F}{\partial z''\partial z}.
\end{array}\right.$$

Entre les 6 premières équations nous éliminons

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z}$$

en multipliant la première par x'' et en retranchant la seconde multipliée par x'; ensuite, la troisième par y'' et la quatrième par y'; et enfin, la cinquième par z'' et la sixième par z'. Ainsi

$$x'' \frac{\partial F}{\partial x} = (x''y' - x'y'') \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + (x''z' - x'z'') \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x},$$

$$y'' \frac{\partial F}{\partial y} = (y''z' - y'z'') \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y} + (y''x' - y'x'') \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y},$$

$$z'' \frac{\partial F}{\partial z} = (z''x' - z'x'') \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z} + (z''y' - z'y'') \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z}$$

et en ajoutant ces équations

$$(10) \qquad -\left[x'' \frac{\partial F}{\partial x} + y'' \frac{\partial F}{\partial y} + z'' \frac{\partial F}{\partial z}\right]$$

$$= (x''y' - x'y'')\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}\right) + (x''z' - x'z'')\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x}\right)$$

$$+ (z''y' - z'y'')\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z}\right).$$

On aura aussi de la 7$^{\text{ième}}$, 9$^{\text{ième}}$ et 11$^{\text{ième}}$ des équations (9)

$$(11) \qquad x'' \frac{\partial F}{\partial x} + y'' \frac{\partial F}{\partial y} + z'' \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$= x''\left[x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z}\right] + y''\left[y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z} + x'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}\right]$$

$$+ z''\left[z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z} + x'' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y}\right]$$

et ainsi de la 8$^{\text{ième}}$, 10$^{\text{ième}}$ et 12$^{\text{ième}}$

$$(12) \qquad 0 = x'\left[x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z}\right]$$

$$+ y'\left[y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z} + x'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}\right] + z'\left[z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z} + x'' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y}\right].$$

Considérons enfin les expressions

$$y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right) + z'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right) + x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} = A,$$

$$z'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}\right) + x'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right) + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z} + x''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} = B,$$

$$x'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right) + y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}\right) + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z} + x''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y} = C.$$

En multipliant la première par x', la seconde par y' et la troisième par z', nous aurons en les ajoutant et en tenant compte à l'équation (12).

$$Ax' + By' + Cz' = 0$$

et d'une manière analogue en vertu des équations (10) et (11)

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0$$

d'où suit immédiatement

$$A = G_1\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}, \qquad B = G_1\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \qquad C = G_1\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

et par conséquent

$$(13) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)$$

$$= -\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\Bigg\{G_1 + F_1\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial u} + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial u} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial u}\right]$$

$$+ F_2\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x''}{\partial v} + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y''}{\partial v} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z''}{\partial v}\right]$$

$$+ 2F_3\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial v} + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial v} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial v}\right]\Bigg\}.$$

D'après le même procédé, formons les expressions

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right).$$

Alors nous trouverons que la quantité entre les { } reste la même, ce qui était à attendre, parce que cette quantité est invariable par la substitution circulaire

$$(x\,,\,y\,,\,z).$$

C'est seulement le premier facteur qui est changé en

$$\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

Nous introduisons maintenant la notation

$$(14)\quad \begin{aligned} G = -\Bigg\{ G_1 &+ F_1\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial u}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial u}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial u}\right] \\ &+ F_2\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x''}{\partial v}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y''}{\partial v}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z''}{\partial v}\right] \\ &+ 2F_3\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial v}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial v}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial v}\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

et nous aurons ainsi

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right) &= \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} G, \\ \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) &= \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} G, \\ \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) &= \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} G. \end{aligned}\right.$$

En substituant ces expressions dans la formule (5) celle-ci devient

$$\delta I = \iint G\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\xi + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\eta + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\zeta\right]dudv.$$

Telle est la forme définitive, que nous pouvons donner à la première variation.

Parmi toutes les variations, que la surface peut subir, ils s'en trouvent certainement de la forme

$$\xi = k\xi_1, \qquad \eta = k\eta_1, \qquad \zeta = k\zeta_1$$

où ξ_1, η_1, ζ_1 sont des fonctions arbitraires et k un constant également arbitraire. Dans ce cas, la variation totale ΔI de l'intégrale (1) prend la forme

$$(16) \quad \Delta I = k\iint G\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\xi_1 + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\eta_1 + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\zeta_1\right]dudv$$
$$+ k^2(\ldots)_2 + \ldots.$$

Nous pouvons toujours choisir k si petite afin que le signe du second membre ne dépende que du signe du premier terme et du signe du k; or si ΔI conserve toujours le même signe indépendant de k, il faut que l'intégrale double soit nulle

$$\iint G\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\xi_1 + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\eta_1 + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\zeta_1\right]dudv = 0$$

ou en introduisant une notation, qui sera conservée

$$w = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\xi + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\eta + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\zeta$$

$$(17) \qquad \iint Gwdudv = 0.$$

Considérons maintenant une intégrale double

$$\iint \varphi(u, v)\psi(u, v)dudv$$

étendue sur tous les points dans l'intérieur de la courbe fermée

$$f(u, v) = 0.$$

Il n'est pas nécessaire que la limite soit une seule courbe; elle peut aussi être composée de plusieurs parties. Supposons que φ et ψ soient des fonctions continues et cherchons les conditions nécessaires, pour que l'intégrale (17) soit nulle, si $\psi(u, v)$ est complétement arbitraire.

Il est evident que l'on doit avoir

$$\varphi(u, v) = 0.$$

pour tous les points dans l'intérieur de la courbe

$$f(u, v) = 0,$$

car dans l'autre cas, nous pourrions choisir le signe de $\psi(u, v)$ égal au signe de $\varphi(u, v)$, de sorte que l'intégrale devienne une somme des quantités positives, qui ne soit pas nulle. Il est facile de voir, que cette condition existe encore, si la fonction $\psi(u, v)$ s'annule aux limites. En effet posons

$$\psi(u, v) = f(u, v)\psi_1(u, v),$$

$$\varphi_1(u, v) = f(u, v)\,\varphi(u, v).$$

Alors l'intégrale devient

$$\iint \varphi_1(u, v)\psi_1(u, v) = 0,$$

d'où nous trouvons

$$\varphi_1(u, v) = 0$$

pour tous les points intérieurs. Mais de cette équation et de l'équation

$$\varphi_1(u, v) = f(u, v)\varphi(u, v)$$

il s'en suit que

$$\varphi(u, v) = 0,$$

et parce que $\varphi(u, v)$ est supposée continue, que l'équation subsiste même aux limites.

Nous appliquons ces considérations à l'intégrale

$$\iint Gw\,du\,dv = 0. \tag{17}$$

Ici w est la fonction arbitraire, parce que elle renferme les variations ξ, η, ζ. G au contraire est indépendante des variations. Après le théorème récemment démontré nous trouverons

$$G = 0 \tag{18}$$

pour tous les points situés dans l'intérieur et sur la courbe

$$f(u, v) = 0,$$

qui forme les limites de l'intégrale.

La condition

$$G = 0$$

nous donne une équation aux dérivées partielles du second ordre, déterminant les surfaces, qui peuvent rendre l'intégrale double (1) un maximum ou un minimum.

Il nous reste à étudier les solutions de cette équation, et à voir si elles donnent un signe invariable à la variation totale

$$\Delta I$$

mais avant de faire ces recherches nous devons nous rendre compte des restrictions, que nous avons faites pour transformer l'intégrale δI.

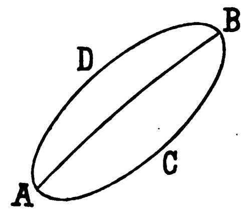
Nous avons employé dans ce but l'identité

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\xi\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \xi\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

que nous avons integrée pour parvenir à la forme (5). Mais, même pour des variations continues, nous sommes obligés de supposer que les variables

$$x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$$

sont continues. Supposons également que x, y, z soient continues, mais que $x', y', z', x'', y'', z''$ cessent de l'être et, par conséquent, qu'il existe des lignes de discontinuité sur la surface. Soit AB une telle ligne et traçons autour de AB un certain contour fermé CD sur la surface de façon que dans l'intérieur de ce contour il n'existe pas d'autre ligne de discontinuité. Maintenant nous pouvons faire varier la surface de manière que la partie au dehors de CD ne soit pas changée. Ensuite nous partageons l'intégrale (1) en deux parties; dans l'une l'intégration est étendue sur la partie ABD de la surface, dans l'autre sur la partie ABC. Dans chaque partie la surface est régulière et nous pouvons, par conséquent, effectuer la transformation de l'intégrale à la forme (5). Ainsi:



$$\delta I = \iint_{ABD} G w\,du\,dv + \iint_{ABC} G w\,du\,dv + \int_{ABDA} H + \int_{ACBA} H,$$

$$H = \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z'}\right] dv - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x''} + \eta \frac{\partial F}{\partial y''} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z''}\right] du.$$

Mais il est évident, que l'on doit avoir

$$G = 0$$

pour toute partie régulière de la surface.

Ensuite, les variations ξ, η, ζ s'annulent au contour CD. Alors δI se réduit à

$$\delta I = \int_{AB} H + \int_{BA} H = \int_{AB} (\overset{+}{H} - \overset{-}{H}),$$

si nous désignons par $\overset{+}{H}$ et $\overset{-}{H}$ les valeurs de H aux deux côtés de la ligne de discontinuité.

$$\begin{aligned}\delta I = \int_{AB} \Bigg\{ & \left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_-\right)\frac{dv}{ds} - \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)_-\right)\frac{du}{ds}\right]\xi \\ & + \left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_-\right)\frac{dv}{ds} - \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_-\right)\frac{du}{ds}\right]\eta \\ & + \left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_-\right)\frac{dv}{ds} - \left(\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_-\right)\frac{du}{ds}\right]\zeta \Bigg\} ds,\end{aligned}$$

ds étant l'élément de l'arc.

Par les mêmes considérations qu'au paravant nous trouverons, pour que

$$\partial I = 0$$

que suivant la ligne de discontinuité

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_-\right]\frac{dv}{ds} - \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)_-\right]\frac{du}{ds} = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_-\right]\frac{dv}{ds} - \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_-\right]\frac{du}{ds} = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_-\right]\frac{dv}{ds} - \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_-\right]\frac{du}{ds} = 0$$

ou en d'autres mots, que les quantités

$$(19) \qquad \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial F}{\partial x''}\frac{du}{ds}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial F}{\partial y''}\frac{du}{ds}, \quad \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial F}{\partial z''}\frac{du}{ds}$$

doivent rester toujours continues suivant chaque courbe tracée sur la surface, pour que l'intégrale (1) puisse être un maximum ou un minimum.

Nous avons trouvé comme condition nécessaire à l'existence d'un maximum ou d'un minimum, que la surface ou au moins chaque partie régulière de la surface, doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$G = 0.$$

Il faut, maintenant, étudier les solutions de cette équation et distinguer celles, qui pour toute variation possible donnent à ΔI un signe invariable.

II Partie.

Sur l'équation $G = 0$.

Etant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

on peut se demander s'il peut se présenter qu'une intégrale de cette équation soit déterminée seulement par la condition de passer par un certain contour fermé de l'espace. L'équation de LAPLACE

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

en donne l'exemple, mais est elle la seule? M. PICARD [1] a résolu cette question pour les équations linéaires, et il a donné des criteriums avec lesquels on peut, d'avance, sans avoir intégré l'équation proposée, juger s'il existe ou non une seule intégrale passant par le contour.

En nous appuyant sur les résultats de M. PICARD nous allons étudier la même question pour les équations non linéaires. Nous nous bornerons, pourtant, aux équations qui sont linéaires par rapport aux dérivées du second ordre. Soit

$$(1) \qquad \Phi(x) = A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2B\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + C\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + F\left(u, v, x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$$

l'équation proposée. A, B et C sont aussi des fonctions de u, v, x, $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$. Soit

$$x, \; x + \xi$$

deux intégrales de cette équation qui passent par le contour donné, on a, évidemment,

$$(2) \qquad \Delta\Phi = \Phi(x + \xi) - \Phi(x) = 0.$$

[1] Journal de Math. 4 série, tome 6, pag. 145. *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives.*

Considérons l'intégrale double

$$\iint \xi[\Phi(x+\xi) - \Phi(x)]\,du\,dv. \tag{3}$$

L'intégration est étendue sur tous les points dans l'intérieur de la courbe fermée

$$f(u, v) = 0,$$

qui est la projection dans le plan (u, v) du contour donné. En vertu de (2) l'intégrale double (3) est nulle. On voit ensuite, immédiatement, que ξ s'annulle sur la courbe

$$f(u, v) = 0.$$

Développons, maintenant, la différence (2) suivant la formule de TAYLOR. On aura, en s'arrêtant aux termes du second ordre

$$\begin{aligned} \Phi(x+\xi) - \Phi(x) \quad & \\ = A\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} + 2B\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v} + C\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} + \frac{\partial\Phi}{\partial x'}\frac{\partial\xi}{\partial u} + \frac{\partial\Phi}{\partial x'}\frac{\partial\xi}{\partial v} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\xi + H_1 & \end{aligned} \tag{4}$$

où H_1 renferme les termes du second ordre. Comme Φ est linéaire par rapport aux dérivées du second ordre, il n'y a pas de termes de la forme

$$\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\right)^2, \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}\right)^2, \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}\right)^2.$$

Alors, on peut écrire

$$\xi H_1 = \Sigma A'_{\lambda\mu}\tau_\lambda\tau_\mu$$

où τ_λ et τ_μ sont les trois quantités $\xi, \frac{\partial\xi}{\partial u}, \frac{\partial\xi}{\partial v}$ et les $A'_{\lambda\mu}$ sont des fonctions linéaires de ξ et de ses dérivées du premier et du second ordre.

Nous substituons la valeur donnée par (4) de la différence (2) dans l'intégrale (3) et intégrons par partie les termes

$$A\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}, \quad 2B\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}, \quad C\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}$$

en observant que ξ s'annulle aux limites. Par cette intégration par partie les termes sous les signes sommes, qui proviennent des termes du premier ordre de la différence (4) deviennent aussi une forme quadratique des variables τ_λ, τ_μ

$$H = \Sigma A_{\lambda\mu}\tau_\lambda\tau_\mu$$

mais, où les $A_{\lambda\mu}$ sont indépendantes de ξ et de ses dérivées. L'intégrale double (3) prend ainsi la forme

$$\iint\{\Sigma[A_{\lambda\mu} + A'_{\lambda\mu}]\tau_\lambda\tau_\mu\}du\,dv = 0. \tag{5}$$

Supposons que

$$x = x(u, v)$$

soit une intégrale de l'équation (1). Substituons cette valeur dans les coefficients $A_{\lambda\mu}$ et $A'_{\lambda\mu}$. Alors, si la forme quadratique

$$H = \Sigma A_{\lambda\mu}\tau_\lambda\tau_\mu$$

dans la région considérée du plan est une forme définie, on peut toujours fixer des limites supérieures de ξ et de ses dérivées du premier est du second ordre, de façon que la forme quadratique

$$\Sigma[A_{\lambda\mu} + A'_{\lambda\mu}]\tau_\lambda\tau_\mu$$

sera aussi une forme définie. Mais, si la forme sous les signes sommes est définie, l'équation (5) est impossible, sauf pour

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \xi = \frac{\partial\xi}{\partial u} = \frac{\partial\xi}{\partial v} = 0.$$

Cela veut dire, que l'on peut entourer le contour donné d'une aire telle que dans cette aire il n'existe pas d'autres intégrales de l'équation (1), qui passent par le contour donné, et qui différent très peu de l'intégrale déjà trouvée. Ainsi pour démontrer l'existence d'une telle aire, il suffit d'établir, que la forme quadratique

$$H = \Sigma A_{\lambda\mu}\tau_\lambda\tau_\mu$$

qui provient des termes du premier ordre de la différence

$$\Delta\Phi = \Phi(x + \xi) - \Phi(x)$$

soit une forme définie.

Ces résultats peuvent, facilement, être étendus à une équation du second ordre avec un nombre quelconque de variables dépendantes et indépendantes, ainsi qu'à un système d'équations. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du système:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \qquad \Phi_2(x, y, z) = 0, \qquad \Phi_3(x, y, z) = 0.$$

Alors, on considère l'intégrale double

$$\iint\{\xi\Delta\Phi_1 + \eta\Delta\Phi_2 + \zeta\Delta\Phi_3\}du dv = 0.$$

Il y a, pourtant, une simplification importante, qu'on doit observer. Nous avons supposé l'existence d'un certain système d'intégrales

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

et nous voulons savoir s'il existe un autre

$$x + \xi, y + \eta, z + \zeta$$

qui passe par le même contour. Mais alors, il n'est pas nécessaire que les trois fonctions ξ, η et ζ soient indépendantes. En effet, cela revient, au fond, à la question de faire correspondre à une surface primitive une autre, qui en est infiniment voisine. Cela peut se faire d'une infinité de manières, mais, si la surface primitive est régulaire il suffit, évidemment, de poser

$$\xi = al, \qquad \eta = bl, \qquad \zeta = cl$$

où a, b, c, sont des cosinus directeurs de la normale de la surface primitive au point (x, y, z). Alors, la quantité sous les signes sommes devient une forme quadratique de l et de ses premières dérivées, sur laquelle nous pouvons employer notre méthode précédente.

Nous allons employer ces principes sur notre équation

$$G = 0$$

mais, il vaut mieux considérer le système équivalent I (15)

$$\Gamma_1 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = 0,$$

$$\Gamma_2 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

$$\Gamma_3 = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0.$$

Notre intégrale double sera alors

$$\iint\{\xi\Delta\Gamma_1 + \eta\Delta\Gamma_2 + \zeta\Delta\Gamma_3\}du\,dv$$

ou, en nous bornant aux termes linéaires,

$$\iint\{\xi\partial\Gamma_1 + \eta\partial\Gamma_2 + \zeta\partial\Gamma_3\}du\,dv. \tag{6}$$

En vertu de la forme spéciale des coefficients des dérivées du second ordre on peut aussi intégrer par partie les termes de H_1, qui contiennent les secondes dérivées de ξ, η et ζ. Les fonctions $A'_{\lambda\mu}$ ne contiennent pas donc ces dérivées et, par conséquent, il suffit de fixer des limites supérieures de ξ, η, ζ et de leurs *premières* dérivées seulement.

Pour montrer cela il suffit de considérer les termes de la forme

$$\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}, \quad \text{etc.}$$

car les autres termes sont immédiatement intégrables. On a

$$\Gamma_1 = -\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - \ldots$$

et, par conséquent

$$\Delta\Gamma_1 = -\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'^2}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2\partial y'}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - \ldots$$

ou

$$\Delta\Gamma_1 = -\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\right) - \ldots.$$

De la même manière on peut traiter tous les termes de cette forme. On voit donc qu'ils sont intégrables.

Il s'agit ensuite de former l'expression

$$\xi\delta\Gamma_1 + \eta\delta\Gamma_2 + \zeta\delta\Gamma_3.$$

Dans ce but partons des formules données I (15)

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} G = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right) = \Gamma_1,$$

$$\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} G = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = \Gamma_2,$$

$$\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} G = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) = \Gamma_3.$$

On aura

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \delta G + \delta \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} G = \delta\Gamma_1,$$

$$\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \delta G + \delta \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} G = \delta\Gamma_2,$$

$$\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \delta G + \delta \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} G = \delta\Gamma_3.$$

En multipliant la première équation par ξ, la seconde par η, la troisième par ζ et en les ajoutant on trouvera, parce que

$$G = 0$$

$$\left\{\xi \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} + \zeta \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\right\} \delta G = \xi\delta\Gamma_1 + \eta\delta\Gamma_2 + \zeta\delta\Gamma_3$$

ou en employant la notation déjà introduite

$$w\delta G = \xi\delta\Gamma_1 + \eta\delta\Gamma_2 + \zeta\delta\Gamma_3.$$

Calculons en l'expression

$$\xi\delta\Gamma_1$$

$$\xi\delta\Gamma_1 = \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x}\xi^2 + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y}\xi\eta + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\xi\zeta + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x'}\xi\frac{\partial\xi}{\partial u} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y'}\xi\frac{\partial\eta}{\partial u} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z'}\xi\frac{\partial\zeta}{\partial u}$$

$$+ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x''}\xi\frac{\partial\xi}{\partial v} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y''}\xi\frac{\partial\eta}{\partial v} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z''}\xi\frac{\partial\zeta}{\partial v} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x'_1}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y'_1}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z'_1}\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}$$

$$+ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x''_{11}}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y''_{11}}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial v^2} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z''_{11}}\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x'_{11}}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y'_{11}}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial v} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z'_{11}}\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v}$$

où on a

$$x'_1 = \frac{\partial x'}{\partial u}, \quad x''_{11} = \frac{\partial x''}{\partial v},$$

$$x'_{11} = x''_1 = \frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{\partial x''}{\partial u}$$

etcet.

Le calcul des coefficients de cette expression se fait facilement; seulement il faut observer que

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\right)$$

etcet.

mais que

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)$$

etcet.

On trouvera ainsi

$$\xi\delta\Gamma_1 = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}\right)\right]\xi^2$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}\right)\right]\xi\eta + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}\right)\right]\xi\zeta$$

$$+\left[-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'}\right)\right]\xi\frac{\partial\xi}{\partial u} + \left[-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}\right)\right]\xi\frac{\partial\xi}{\partial v}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\right]\xi\frac{\partial\eta}{\partial u}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z'} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right)\right]\xi\frac{\partial\zeta}{\partial u}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y''} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''}\right)\right]\xi\frac{\partial\eta}{\partial v}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z''} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''}\right)\right]\xi\frac{\partial\zeta}{\partial v}$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''}\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2}$$

$$-2\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial v} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right)\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v}.$$

Multiplions les deux membres par *dudv* et intégrons par partie les termes qui contiennent les dérivées du second ordre. On a, parce que ξ, η et ζ s'annulent aux limites

$$-\iint\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}dudv = \iint\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\right)\xi\frac{\partial\xi}{\partial u}\right\}dudv,$$

$$-\iint\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}dudv = \iint\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\right)\xi\frac{\partial\eta}{\partial u}\right\}dudv,$$

$$-\iint\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}dudv = \iint\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\right)\xi\frac{\partial\xi}{\partial v}\right\}dudv,$$

$$-\iint \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\,\xi\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\partial v}\,du\,dv = \iint \left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial \xi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\right)\xi\frac{\partial \xi}{\partial u}\right\}du\,dv,$$

$$-\iint \left\{\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right\}\xi\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial u\partial v}\,du\,dv = \iint \left\{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial \eta}{\partial v}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\xi\frac{\partial \eta}{\partial v}\right\}du\,dv$$

etcet.

En traitant de la même manière les deux autres expressions

$$\eta\delta\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\}, \qquad \zeta\delta\left\{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)\right\}$$

et en les ajoutant à la première, nous aurons enfin

$$\text{(7)} \qquad \iint w\,\delta G\,du\,dv$$

$$= \iint \left\{\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}\right)\right]\xi^2 + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial y}\right)\right]\eta^2\right.$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial z}\right)\right]\zeta^2$$

$$+ \left[2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right)\right]\xi\eta$$

$$+ \left[2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}\right)\right]\xi\zeta$$

$$+ \left[2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y}\right)\right]\eta\zeta$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\right]\xi\frac{\partial \eta}{\partial u} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\right]\eta\frac{\partial \xi}{\partial u}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\right]\xi\frac{\partial \eta}{\partial v} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\right]\eta\frac{\partial \xi}{\partial v}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right)\right]\xi\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right)\right]\zeta\frac{\partial \xi}{\partial u}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right)\right]\xi\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right)\right]\zeta\frac{\partial\xi}{\partial v}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}\right)\right]\eta\frac{\partial\zeta}{\partial u}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right)\right]\zeta\frac{\partial\eta}{\partial u}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}\right)\right]\eta\frac{\partial\zeta}{\partial u}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right)\right]\zeta\frac{\partial\eta}{\partial v}$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)^2$$

$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z''}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}+\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)+2\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y''}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)+2\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z''}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\Bigg\}du\,dv.$$

Transformons cette intégrale: En premier lieu on a, évidemment, les identités suivantes

$$0=\frac{1}{2}\iint\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial u}(\xi\eta)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial v}(\xi\eta)\right\}du\,dv,$$

$$0=\frac{1}{2}\iint\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}+\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial u}(\xi\zeta)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}+\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial v}(\xi\zeta)\right\}du\,dv,$$

$$0=\frac{1}{2}\iint\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}+\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right)\frac{\partial}{\partial u}(\eta\zeta)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}+\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right)\frac{\partial}{\partial v}(\eta\zeta)\right\}du\,dv.$$

En ajoutant ces identités à notre intégrale (7), les termes renfermant les produits des variations avec leurs dérivées prennent une forme plus symmétrique, savoir

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'}\right)\right]\xi\frac{\partial \eta}{\partial u}$$

$$-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'}\right)\right]\eta\frac{\partial \xi}{\partial u},$$

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'}\right)\right]\xi\frac{\partial \eta}{\partial v}$$

$$-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'}\right)\right]\eta\frac{\partial \xi}{\partial v}$$

etcet.

Il faut, maintenant, calculer les expressions

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'}\right), \quad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'}\right), \text{ etcet.}$$

et, dans ce but, nous partons des quatre équations suivantes, qui se trouvent parmi les équations I (6)

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = x''\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'},$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x'} = x'\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'},$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x'} = x''\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} = x'\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'}.$$

Multiplions la première par $+z'$, la seconde par $-z''$, la troisième $-z'$, la quatrième par $+z''$ et ajoutons. Nous trouverons donc

$$2\left(z'\frac{\partial F}{\partial x'} + z''\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = (y''z' - y'z'')\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + (y'z'' - y''z')\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}$$

ou en introduisant les notations

$$y'z'' - y''z' = \alpha, \qquad z'x'' - z''x' = \beta, \qquad x'y'' - x''y' = \gamma,$$

(8) $$\frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'}\right) = z'\frac{\partial F}{\partial x'} + z''\frac{\partial F}{\partial x'}.$$

En différentiant (8) par rapport à v

$$\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}\right)=z'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)+z''\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)+\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial z'}{\partial v}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial z'}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}\right),$$

or les valeurs de x, y et z satisfont à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=0,$$

par conséquent

$$z''\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)=z''\frac{\partial F}{\partial x}-z''\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right),$$

ainsi

$$\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}\right)=z''\frac{\partial F}{\partial x}+z'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)-z''\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)+\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial z'}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial z'}{\partial v}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}\right).$$

Parmi les formules I (6) et I (9) on trouve les suivantes

$$(9)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}= x'\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}+y'\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+z'\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x},\\[2mm] 0= x''\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}+y''\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+z''\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x},\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial x'}= x''\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x'}+y''\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}+z''\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'},\\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial x'}=-x'\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x'}-y'\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}-z'\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'},\\[2mm] 0= x'\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'^2}+y'\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}+z'\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'},\\[2mm] 0= x''\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'^2}+y''\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}+z''\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'}.\end{cases}$$

On a ensuite

$$\frac{\partial x''}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y''}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z''}{\partial u} = \frac{\partial z'}{\partial v}.$$

En différentiant directement $\frac{\partial F}{\partial x}$ par rapport à u et v, on a en vertu des relations (9)

$$\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)$$

$$= z''\left[x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right] - z'\left[x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right]$$

$$+ z'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}x'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial v}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial x''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''}\frac{\partial z''}{\partial v}\right] - \frac{\partial z'}{\partial v}\left[x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\right]$$

$$- z''\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial u}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial x''}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''}\frac{\partial z''}{\partial u}\right] + \frac{\partial z'}{\partial u}\left[x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\right]$$

$$+ \frac{\partial z'}{\partial v}\left[x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right] - \frac{\partial z''}{\partial v}\left[x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)$$

$$= \alpha\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right] + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\left(z'\frac{\partial x''}{\partial u} + x''\frac{\partial z'}{\partial u} - x'\frac{\partial z''}{\partial u} - z''\frac{\partial x'}{\partial u}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\left(z'\frac{\partial y''}{\partial u} + y''\frac{\partial z'}{\partial u} - y'\frac{\partial z''}{\partial u} - z''\frac{\partial y'}{\partial u}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\left(z'\frac{\partial x''}{\partial v} + x''\frac{\partial z'}{\partial v} - x'\frac{\partial z''}{\partial v} - z''\frac{\partial x'}{\partial v}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\left(z'\frac{\partial y''}{\partial v} + y''\frac{\partial z'}{\partial v} - y'\frac{\partial z''}{\partial v} - z''\frac{\partial y'}{\partial v}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial\alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)$$

ou en tenant compte des valeurs de α et β

$$\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)$$

$$=\alpha\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right]+\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial v}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial v},$$

mais suivant I (8)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}=F_1\alpha^2,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}=F_1\alpha\beta,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}=F_3\alpha^2,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}=2F_3\alpha\beta$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}+F_1\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial u}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)+F_3\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial v}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right).$$

De la même manière, on trouvera

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)&=-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right]+F_2\left(\beta\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\alpha\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)\\
&\quad+F_3\left(\beta\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\alpha\frac{\partial\beta}{\partial u}\right),\\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)&=\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}+F_1\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial u}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\\
&\quad+F_3\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right),\\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)&=-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right]+F_2\left(\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)\\
&\quad+F_3\left(\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial u}\right),\\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}\right)&=\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}+F_1\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial u}-\gamma\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\\
&\quad+F_3\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\gamma\frac{\partial\beta}{\partial v}\right),\\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}\right)&=-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}\right]+F_2\left(\gamma\frac{\partial\beta}{\partial v}-\beta\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)\\
&\quad+F_3\left(\gamma\frac{\partial\beta}{\partial u}-\beta\frac{\partial\gamma}{\partial u}\right).
\end{aligned}\right.$$

Nous introduisons maintenant ces valeurs dans les coefficients de notre intégrale (7) en employant les abréviations

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \qquad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \beta' = \frac{\partial \beta}{\partial u}, \qquad \beta'' = \frac{\partial \beta}{\partial v} \quad \text{etcet.}$$

$$\xi' = \frac{\partial \xi}{\partial u}; \qquad \xi'' = \frac{\partial \xi}{\partial v}, \qquad \eta' = \frac{\partial \eta}{\partial u}, \qquad \eta'' = \frac{\partial \eta}{\partial v} \quad \text{etcet.}$$

Les termes contenant les dérivées des variations peuvent être écrits de la manière suivante, si nous nous servons des formules I (8)

$$\begin{aligned}
U = & - [F_1(\alpha\beta' - \beta\alpha') + F_3(\alpha\beta'' - \beta\alpha'')]\xi\eta' \\
& + [F_1(\alpha\beta' - \beta\alpha') + F_3(\alpha\beta'' - \beta\alpha'')]\eta\xi' \\
& - [F_2(\alpha\beta'' - \beta\alpha'') + F_3(\alpha\beta' - \beta\alpha')]\xi\eta'' \\
& + [F_2(\alpha\beta'' - \beta\alpha'') + F_3(\alpha\beta' - \beta\alpha')]\eta\xi'' \\
& - [F_1(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + F_3(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')]\xi\zeta' \\
& + [F_1(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + F_3(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')]\zeta\xi' \\
& - [F_2(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') + F_3(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')]\xi\zeta'' \\
& + [F_2(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') + F_3(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')]\zeta\xi'' \\
& - [F_1(\beta\gamma' - \gamma\beta') + F_3(\beta\gamma'' - \gamma\beta'')]\eta\zeta' \\
& + [F_1(\beta\gamma' - \gamma\beta') + F_3(\beta\gamma'' - \gamma\beta'')]\zeta\eta' \\
& - [F_2(\beta\gamma'' - \gamma\beta'') + F_3(\beta\gamma' - \gamma\beta')]\eta\zeta'' \\
& + [F_2(\beta\gamma'' - \gamma\beta'') + F_3(\beta\gamma' - \gamma\beta')]\zeta\eta'' \\
& + F_1(\alpha^2\xi'^2 + \beta^2\eta'^2 + \gamma^2\zeta'^2 + 2\alpha\beta\xi'\eta' + 2\alpha\gamma\xi'\zeta' + 2\beta\gamma\eta'\zeta') \\
& + F_2(\alpha^2\xi''^2 + \beta^2\eta''^2 + \gamma^2\zeta''^2 + 2\alpha\beta\xi''\eta'' + 2\alpha\gamma\xi''\zeta'' + 2\beta\gamma\eta''\zeta'') \\
& + 2F_3(\alpha^2\xi'\xi'' + \beta^2\eta'\eta'' + \gamma^2\zeta'\zeta'' + \alpha\beta(\xi'\eta'' + \xi''\eta') + \alpha\gamma(\xi'\zeta'' + \xi''\zeta') \\
& + \beta\gamma(\eta'\zeta'' + \eta''\zeta').
\end{aligned}$$

On voit immédiatement, que les trois derniers termes sont

$$\begin{aligned}
& F_1(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')^2 + F_2(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'')^2 \\
& + 2F_3(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'').
\end{aligned}$$

Nous allons ensuite former l'expression

$$W = F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v},$$

où w à la même signification qu'auparavant savoir

$$w = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta,$$

alors

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta' + \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'' + \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta$$

et ensuite

$$\begin{aligned} F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 = {} & F_1(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')^2 + 2F_1(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta) \\ & + F_1(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = {} & F_2(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'')^2 + 2F_2(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'')(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta) \\ & + F_2(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} = {} & 2F_3(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'') \\ & + 2F_3(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta) \\ & + 2F_3(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'')(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta) \\ & + 2F_3(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta)(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W = {} & F_1(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')^2 + F_2(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'')^2 \\ & + 2F_3(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'') \\ & + \xi\xi'[2F_1\alpha\alpha' + 2F_3\alpha\alpha''] + \eta\eta'[2F_1\beta\beta' + 2F_3\beta\beta''] + \zeta\zeta'[2F_1\gamma\gamma' + 2F_3\gamma\gamma''] \\ & + \xi\xi''[2F_2\alpha\alpha'' + 2F_3\alpha\alpha'] + \eta\eta''[2F_2\beta\beta'' + 2F_3\beta\beta'] + \zeta\zeta''[2F_2\gamma\gamma'' + 2F_3\gamma\gamma'] \\ & + \xi\eta'[2F_1\beta\alpha' + 2F_3\beta\alpha''] + \eta\xi'[2F_1\alpha\beta' + 2F_3\alpha\beta''] \\ & + \xi\eta''[2F_2\beta\alpha'' + 2F_3\beta\alpha'] + \eta\xi''[2F_2\alpha\beta'' + 2F_3\alpha\beta'] \end{aligned}$$

$$+\ \xi\zeta'[2F_1\gamma\alpha' + 2F_3\gamma\alpha''] + \zeta\xi'[2F_1\alpha\gamma' + 2F_3\alpha\gamma'']$$
$$+\ \xi\zeta''[2F_2\gamma\alpha'' + 2F_3\gamma\alpha'] + \zeta\xi''[2F_2\alpha\gamma'' + 2F_3\alpha\gamma']$$
$$+\ \eta\zeta'[2F_1\gamma\beta' + 2F_3\gamma\beta''] + \zeta\eta'[2F_1\beta\gamma' + 2F_3\beta\gamma'']$$
$$+\ \eta\zeta''[2F_2\gamma\beta'' + 2F_3\gamma\beta'] + \zeta\eta''[2F_2\beta\gamma'' + 2F_3\beta\gamma']$$
$$+\ W_1,$$

$$W_1 = \xi^2[F_1\alpha'^2 + F_2\alpha''^2 + 2F_3\alpha'\alpha''] + \eta^2[F_1\beta'^2 + F_2\beta''^2 + 2F_3\beta'\beta'']$$
$$+\ \zeta^2[F_1\gamma'^2 + F_2\gamma''^2 + 2F_3\gamma'\gamma'']$$
$$+\ \xi\eta[2F_1\alpha'\beta' + 2F_2\alpha''\beta'' + 2F_3(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta')]$$
$$+\ \xi\zeta[2F_1\alpha'\gamma' + 2F_2\alpha''\gamma'' + 2F_3(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')]$$
$$+\ \eta\zeta[2F_1\beta'\gamma' + 2F_2\beta''\gamma'' + 2F_3(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma')].$$

Formons maintenant la différence

$$W - U.$$

On trouve que dans cette différence les coefficients de $\xi\eta'$ et de $\eta\xi'$, de $\xi\zeta'$ et de $\zeta\xi'$ etcet. deviennent égaux et, par conséquent, que la différence peut s'écrire

$$W - U =$$

$$[F_1\alpha\alpha' + F_3\alpha\alpha'']\frac{\partial}{\partial u}(\xi^2) + [F_1\beta\beta' + F_3\beta\beta'']\frac{\partial}{\partial u}(\eta^2) + [F_1\gamma\gamma' + F_3\gamma\gamma'']\frac{\partial}{\partial u}(\zeta^2)$$

$$+ [F_2\alpha\alpha'' + F_3\alpha\alpha']\frac{\partial}{\partial v}(\xi^2) + [F_2\beta\beta'' + F_3\beta\beta']\frac{\partial}{\partial v}(\eta^2) + [F_2\gamma\gamma'' + F_3\gamma\gamma']\frac{\partial}{\partial v}(\zeta^2)$$

$$+\left[F_1\frac{\partial}{\partial u}(\alpha\beta) + F_3\frac{\partial}{\partial v}(\alpha\beta)\right]\frac{\partial}{\partial u}(\xi\eta) + \left[F_2\frac{\partial}{\partial v}(\alpha\beta) + F_3\frac{\partial}{\partial u}(\alpha\beta)\right]\frac{\partial}{\partial v}(\xi\eta)$$

$$+\left[F_1\frac{\partial}{\partial u}(\alpha\gamma) + F_3\frac{\partial}{\partial v}(\alpha\gamma)\right]\frac{\partial}{\partial u}(\xi\zeta) + \left[F_2\frac{\partial}{\partial v}(\alpha\gamma) + F_3\frac{\partial}{\partial u}(\alpha\gamma)\right]\frac{\partial}{\partial v}(\xi\zeta)$$

$$+\left[F_1\frac{\partial}{\partial u}(\beta\gamma) + F_3\frac{\partial}{\partial v}(\beta\gamma)\right]\frac{\partial}{\partial u}(\eta\zeta) + \left[F_2\frac{\partial}{\partial v}(\beta\gamma) + F_3\frac{\partial}{\partial u}(\beta\gamma)\right]\frac{\partial}{\partial v}(\eta\zeta)$$

$$+\ W_1.$$

En intégrant par partie on aura

$$\iint (W - U)\,du\,dv$$

$$= \iint \Big\{ \xi^2 \Big[F_1 \alpha'^2 + F_2 \alpha''^2 + 2F_3 \alpha'\alpha'' - \frac{\partial}{\partial u}(F_1 \alpha\alpha' + F_3 \alpha\alpha'') - \frac{\partial}{\partial v}(F_2 \alpha\alpha'' + F_3 \alpha\alpha') \Big]$$

$$+ \eta^2 \Big[F_1 \beta'^2 + F_2 \beta''^2 + 2F_3 \beta'\beta'' - \frac{\partial}{\partial u}(F_1 \beta\beta' + F_3 \beta\beta'') - \frac{\partial}{\partial v}(F_2 \beta\beta'' + F_3 \beta\beta') \Big]$$

$$+ \zeta^2 \Big[F_1 \gamma'^2 + F_2 \gamma''^2 + 2F_3 \gamma'\gamma'' - \frac{\partial}{\partial u}(F_1 \gamma\gamma' + F_3 \gamma\gamma'') - \frac{\partial}{\partial v}(F_2 \gamma\gamma'' + F_3 \gamma\gamma') \Big]$$

$$+ \xi\eta \Big[2F_1 \alpha'\beta' + 2F_2 \alpha''\beta'' + 2F_3(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta') - \frac{\partial}{\partial u}[F_1(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + F_3(\alpha\beta'' + \alpha''\beta)]$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}[F_2(\alpha\beta'' + \alpha''\beta) + F_3(\alpha\beta' + \alpha'\beta)] \Big]$$

$$+ \xi\zeta \Big[2F_1 \alpha'\gamma' + 2F_2 \alpha''\gamma'' + 2F_3(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma') - \frac{\partial}{\partial u}[F_1(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) + F_3(\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)]$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}[F_2(\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma) + F_3(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)] \Big]$$

$$+ \eta\zeta \Big[2F_1 \beta'\gamma' + 2F_2 \beta''\gamma'' + 2F_3(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') - \frac{\partial}{\partial u}[F_1(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + F_3(\beta\gamma'' + \beta''\gamma)]$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}[F_2(\beta\gamma'' + \beta''\gamma) + F_3(\beta\gamma' + \beta'\gamma)] \Big] \Big\} du\,dv.$$

Nous introduisons maintenant les notations

$$(12) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{\partial}{\partial u}(F_1 \alpha' + F_3 \alpha'') + \dfrac{\partial}{\partial v}(F_2 \alpha'' + F_3 \alpha'), \\[2ex] B = \dfrac{\partial}{\partial u}(F_1 \beta' + F_3 \beta'') + \dfrac{\partial}{\partial v}(F_2 \beta'' + F_3 \beta'), \\[2ex] C = \dfrac{\partial}{\partial u}(F_1 \gamma' + F_3 \gamma'') + \dfrac{\partial}{\partial v}(F_2 \gamma'' + F_3 \gamma'). \end{cases}$$

Alors on trouve, après avoir effectué les différentiations

$$\iint (W - U)\,du\,dv$$

$$= -\iint [\xi^2 A\alpha + \eta^2 B\beta + \zeta^2 C\gamma + \xi\eta(A\beta + B\alpha) + \xi\zeta(A\gamma + C\alpha) + \eta\zeta(B\gamma + C\beta)]\,du\,dv$$

et, par conséquent,

$$\iint U du dv = \iint \Big| F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3 \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + \xi^2 A\alpha + \eta^2 B\beta + \zeta^2 C\gamma$$
$$+ \xi\eta(A\beta + B\alpha) + \xi\zeta(A\gamma + C\alpha) + \eta\zeta(B\gamma + C\beta)\Big| du dv.$$

Mais

$$\iint U du dv$$

est la partie de l'intégrale (7), qui contient les dérivées des variations. En introduisant les notations suivantes notre intégrale double (7) peut s'écrire

$$(13)\begin{cases} L_{11} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right) + A\alpha, \\ L_{22} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}\right) + B\beta, \\ L_{33} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z}\right) + C\gamma, \\ L_{12} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right) + \dfrac{1}{2}(A\beta + B\alpha), \\ L_{13} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right) + \dfrac{1}{2}(A\gamma + C\alpha), \\ L_{23} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}\right) + \dfrac{1}{2}(B\gamma + C\beta), \end{cases}$$

$$\iint w\delta G du dv$$
$$= \iint \Big| F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + L_{11}\xi^2 + L_{22}\eta^2 + L_{33}\zeta^2$$
$$+ 2L_{12}\xi\eta + 2L_{13}\xi\zeta + 2L_{23}\eta\zeta\Big| du dv.$$

Cette forme de l'intégrale (7) se simplifie encore. Nous pouvons démontrer que, les coefficients L ont la forme

$$L_{11} = F_4\alpha^2, \qquad L_{22} = F_4\beta^2, \qquad L_{33} = F_4\gamma^2,$$
$$L_{12} = F_4\alpha\beta, \qquad L_{13} = F_4\alpha\gamma, \qquad L_{23} = F_4\beta\gamma,$$

où F_4 est un certain facteur commun.

Pour démontrer cela il suffit évidemment de démontrer que les coefficients L satisfont au système suivant des équations linéaires

$$
(14)\qquad \left\{\begin{aligned}
x'L_{11} + y'L_{12} + z'L_{13} &= 0,\\
x''L_{11} + y''L_{12} + z''L_{13} &= 0,\\
x'L_{12} + y'L_{22} + z'L_{23} &= 0,\\
x''L_{12} + y''L_{22} + z''L_{23} &= 0,\\
x'L_{13} + y'L_{23} + z'L_{33} &= 0,\\
x''L_{13} + y''L_{23} + z''L_{33} &= 0.
\end{aligned}\right.
$$

C'est le même système que nous avons déjà résolu et dont la solution se trouve parmi les formules I (8).

Pour déduire ces équations par exemple la première, partons des deux équations

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x},
$$

$$
0 = x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}
$$

qui se trouvent parmi les formules I (9). Différentions la première par rapport à u, la seconde par rapport à v et ajoutons. On trouve

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial x''}\frac{\partial x''}{\partial u}\\
&+ \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z''}\frac{\partial z''}{\partial u} = x'\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right) + y'\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right) + z'\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)\\
&+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\frac{\partial y'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\frac{\partial z'}{\partial u} + x'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}\right) + y'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right) + z'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}\right)\\
&+ \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}\frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\frac{\partial y'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}\frac{\partial z}{\partial v}.
\end{aligned}
$$

En observant que

$$
\frac{\partial x''}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y''}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z''}{\partial u} = \frac{\partial z'}{\partial v},
$$

on aura

$$x'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}\right)\right]+y'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right)\right]$$

$$+z'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}\right)\right]=0.$$

Les coefficients de y' et z' peuvent s'écrire

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}\right).$$

Parmi les formules (10) nous trouvons les relations suivantes

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}=F_1(\alpha\beta'-\beta\alpha')+F_3(\alpha\beta''-\beta\alpha'')-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}=F_2(\alpha\beta''-\beta\alpha'')+F_3(\alpha\beta'-\beta\alpha')+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right).$$

Différentions la première par rapport à u, la seconde par rapport à v et ajoutons

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial u}[F_1(\alpha\beta'-\beta\alpha')+F_3(\alpha\beta''-\beta\alpha'')]+\frac{\partial}{\partial v}[F_2(\alpha\beta''-\beta\alpha'')+F_3(\alpha\beta'-\beta\alpha')].$$

En effectuant les différentiations on aura

$$\frac{\partial}{\partial u}[F_1(\alpha\beta'-\beta\alpha')+F_3(\alpha\beta''-\beta\alpha'')]=\alpha\frac{\partial}{\partial u}(F_1\beta'+F_3\beta'')-\beta\frac{\partial}{\partial u}(F_1\alpha'+F_3\alpha''),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}[F_2(\alpha\beta''-\beta\alpha'')+F_3(\alpha\beta'-\beta\alpha')]=\alpha\frac{\partial}{\partial v}(F_2\beta''+F_3\beta')-\beta\frac{\partial}{\partial v}(F_2\alpha''+F_3\alpha').$$

Ainsi avec les notations (12)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)=B\alpha-A\beta.$$

On trouvera de la même manière

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)=C\alpha-A\gamma.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions (15) notre équation linéaire prend la forme

$$(16)\qquad x'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right)\right]$$

$$+y'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right)+\frac{1}{2}(B\alpha-A\beta)\right]$$

$$+z'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right)+\frac{1}{2}(C\alpha-A\gamma)\right]=0.$$

Ensuite on a l'identité

$$x'\alpha+y'\beta+z'\gamma=0$$

ou de même

$$Ax'\alpha+Ay'\beta+Az'\gamma=0.$$

En ajoutant cette identité à l'équation (16) on aura

$$x'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right)+A\alpha\right]$$

$$+y'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right)+\frac{1}{2}(B\alpha+A\beta)\right]$$

$$+z'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right)+\frac{1}{2}(C\alpha+A\gamma)\right]=0$$

ou après les notations (13)

$$x'L_{11}+y'L_{12}+z'L_{13}=0.$$

D'une manière tout à fait analogue, on peut déduire les autres équations (14).

Alors

$$L_{11}\xi^2 + L_{22}\eta^2 + L_{33}\zeta^2 + 2L_{12}\xi\eta + 2L_{13}\xi\zeta + 2L_{23}\eta\zeta$$
$$= F_4(\alpha^2\xi^2 + \beta^2\eta^2 + \gamma^2\zeta^2 + 2\alpha\beta\xi\eta + 2\alpha\gamma\xi\zeta + 2\beta\gamma\eta\zeta) = F_4(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)^2$$
$$= F_4 w^2.$$

En substituant ce résultat dans l'expression de

$$\iint w\,\delta G du dv$$

cette intégrale double prend la forme très simple

$$(17)\qquad \iint w\,\delta G du dv = \iint \left\{F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + F_4 w^2\right\} du dv.$$

Les coefficients F_1, F_2, F_3, F_4 sont des fonctions connues de x, y, z et de leurs dérivées, mais ils ne dépendent point des variations ξ, η, ζ.

Supposons que nous ayons intégré l'équation

$$G = 0$$

par les fonctions

$$x = x(u, v),\qquad y = y(u, v),\qquad z = z(u, v)$$

et que la surface représentée par ces équations passe par les limites données. En substituant ces valeurs de x, y, z dans les coefficients F_1, F_2, F_3, F_4 ces derniers deviennent des fonctions de u et v.

Il s'agit de trouver si pour ces valeurs de x, y, z la forme quadratique sous les signes sommes de (17)

$$F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + F_4 w^2$$

est une forme définie.

Cette expression peut s'écrire

$$\frac{1}{F_1}\left\{\left(F_1\frac{\partial w}{\partial u} + F_3\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + (F_1F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + F_1F_4 w^2\right\}.$$

Maintenant nous pouvons suivre la marche indiquée par M. Picard dans son mémoire déjà cité.

On voit immédiatement, que la forme est définie, si

$$
(18)\qquad \begin{aligned} F_1F_2 - F_3^2 > 0, \\ F_1F_3 > 0. \end{aligned}
$$

La première de ces conditions est nécessaire.

Dans le cas, où la seconde n'est pas remplie, il peut pourtant se présenter que la forme peut être transformée d'une telle façon, qu'elle sera définie.

En effet, on a, quelles que soient les fonctions réelles et continues B et B_1 de u et v,

$$
\iint \left\{ \frac{\partial (Bw^2)}{\partial u} + \frac{\partial (B_1 w^2)}{\partial v} \right\} du\, dv = 0,
$$

l'intégration étant étendue sur tous les points dans l'intérieur du contour donné C. En ajoutant cette identité à l'intégrale (17) nous aurons

$$
\iint w\delta G\, du\, dv = \iint \left\{ F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + 2Bw\frac{\partial w}{\partial u} + 2B_1 w\frac{\partial w}{\partial v} \right.
$$
$$
\left. + w^2\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + F_4\right)\right\} du\, dv.
$$

La forme entre les crochets sera définie si l'on a

$$
F_1F_2 - F_3^2 > 0
$$

et ensuite s'il est possible de déterminer B et B_1 de façon que

$$
(19)\qquad F_1\left\{(F_1F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + F_4\right) - F_1B_1^2 + 2F_3B_1B - F_2B^2\right\} > 0.
$$

M. Picard a montré que cela est toujours possible si le contour est suffisamment petit. Si

$$
F_1F_4 > 0,
$$

on peut évidemment poser

$$
B = B_1 = 0
$$

et on retombe ainsi aux conditions (18).

Si ces conditions sont remplies, l'équation

$$\iint w\delta G du dv = 0$$

n'a pas d'autre solution que

$$w = 0$$

ou

$$\xi \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} + \zeta \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cela veut dire, que la projection à la normale de la surface donnée de la distance au point correspondant de la surface variée est nulle, ou que la surface variée coincide avec la surface donnée.

Les conditions (19) remplies, d'après le théorème démontré au commencement de ce chapitre, il est toujours possible de construire une aire autour du contour donné dans l'espace, de façon que dans cette aire il n'existe pas d'autres intégrales de l'équation

$$G = 0,$$

qui passent par le contour donné et dont les variations des dérivées du *premier* ordre des coordonnées des points correspondants sont infiniment petites.

Dans ce sens nous disons qu'il n'existe qu'une seule surface, donnée par l'équation

$$G = 0,$$

qui passe par le contour donné, ou bien que l'intégrale trouvée est unique.

Nous pouvons en tirer une conséquence extrêmement importante. Les quantités

$$F_1, F_2, F_3, F_4$$

sont des fonctions continues de x, y, z et de leurs dérivées. Par conséquent, si les conditions (19) sont remplies pour la surface primitive, elle le sont aussi pour toute autre surface qui diffère très peu de celle-là. Ainsi on peut construire autour de la surface primitive une aire telle que les conditions (19) soient remplies pour chaque surface dans l'intérieur de cette aire qui diffère très peu de la surface primitive. Prenons ensuite dans cette aire un contour fermé complètement arbitraire. Alors nous pouvons énoncer le théorème suivant:

»S'il existe une surface ou une intégrale de l'équation

$$G = 0$$

qui passe par ce contour, et si, en outre, la surface est située tout à fait dans l'aire susdite et diffère très peu de la surface primitive, il n'en existe qu'une seule.»

Nous verrons plus tard l'extrême importance de ce résultat.

Il est facile de voir qu'il est nécessaire pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum que la forme quadratique sous les signes sommes de (17) soit une forme définie. En effet, nous avons pour des variations spéciales.

$$\Delta I = k\partial I + \frac{k^2}{\underline{|2}}\partial^2 I + \frac{k^3}{\underline{|3}}\partial^3 I + \ldots,$$

où

$$\partial I = \iint G w du dv$$

et, par conséquent,

$$\partial^2 I = \iint (w\partial G + G\partial w) du dv = \iint w \partial G du dv$$

en vertu de l'équation

$$G = 0.$$

Ainsi

$$\Delta I = \frac{k^2}{\underline{|2}} \iint w \partial G du dv + \frac{k^3}{\underline{|3}} \partial^3 I + \ldots. \tag{20}$$

On pourrait toujours choisir k si petite que le signe de ΔI soit le même que le signe de

$$\iint w \partial G du dv$$

et pour que cette intégrale conserve toujours le même signe, il est absolument indispensable que la forme sous les signes sommes soit définie. Par conséquent, c'est une condition nécessaire si non suffisante pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum.

Il nous reste maintenant à étudier la condition (19)

$$F_1\left\{(F_1F_2-F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u}+\frac{\partial B_1}{\partial v}+F_4\right)-F_1B_1^2+2F_3B_1B-F_2B^2\right\}>0.$$

Posons

$$(21)\qquad (F_1F_2-F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u}+\frac{\partial B_1}{\partial v}+F_4\right)-F_1B_1^2+2F_3B_1B-F_2B^2 = (F_1F_2-F_3^2)\varepsilon,$$

où ε est un constant, qui a le même signe que F_1. Il s'agit de résoudre cette équation aux dérivées partielles. Dans ce but posons ensuite

$$B=\frac{V}{U},\qquad B_1=\frac{V'}{U'}.$$

On aura donc

$$\frac{\partial B}{\partial u}=\frac{1}{U}\frac{\partial V}{\partial u}-\frac{V}{U^2}\frac{\partial U}{\partial u},\qquad \frac{\partial B_1}{\partial v}=\frac{1}{U'}\frac{\partial V'}{\partial v}-\frac{V'}{U'^2}\frac{\partial U'}{\partial v}$$

et l'équation (21) prend la forme

$$(22)\qquad (F_1F_2-F_3^2)\left\{\frac{1}{U}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{1}{U'}\frac{\partial V'}{\partial v}+F_4-\varepsilon-\frac{V}{U^2}\frac{\partial U}{\partial u}-\frac{V'}{U'^2}\frac{\partial U'}{\partial v}\right\} -F_1\frac{V'^2}{U'^2}+2F_3\frac{V'}{U'}\frac{V}{U}-F_2\frac{V^2}{U^2}=0.$$

Puis nous déterminons V et V' de façon que

$$-(F_1F_2-F_3^2)\frac{1}{U^2}\frac{\partial U}{\partial u}+F_3\frac{V'}{U'}\frac{1}{U}-F_2\frac{V}{U^2}=0,$$

$$-(F_1F_2-F_3^2)\frac{1}{U'^2}\frac{\partial U'}{\partial v}+F_3\frac{V}{U}\frac{1}{U'}-F_1\frac{V'}{U'^2}=0,$$

d'où résulte

$$(23)\qquad \begin{cases} V=-U\left\{\dfrac{F_1}{U}\dfrac{\partial U}{\partial u}+\dfrac{F_3}{U'}\dfrac{\partial U'}{\partial v}\right\}, \\[2ex] V'=-U'\left\{\dfrac{F_2}{U'}\dfrac{\partial U'}{\partial v}+\dfrac{F_3}{U}\dfrac{\partial U}{\partial u}\right\}. \end{cases}$$

Alors l'équation (22) se réduit à

$$\frac{1}{U}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{1}{U'}\frac{\partial V'}{\partial v}+F_4-\varepsilon=0$$

ou

$$(24)\quad -\frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial u}\left\{U\left[F_1\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial u}+F_3\frac{1}{U'}\frac{\partial U'}{\partial v}\right]\right\}-\frac{1}{U'}\frac{\partial}{\partial v}\left\{U'\left[F_2\frac{1}{U'}\frac{\partial U'}{\partial v}+F_3\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial u}\right]\right\}$$
$$+F_1-\varepsilon=0.$$

S'il est possible de trouver deux intégrales U et U' de cette équation, qui ne s'annulent pas dans l'intérieur de la courbe fermée

$$f(u\,,\,v)=0,$$

nous avons aussi trouvé deux fonctions B et B_1 qui remplissent les conditions (19).

Il existe sur la surface des courbes, au dehors des quelles cesse nécessairement la propriété maximale ou minimale. Pour les trouver, posons dans l'équation (24)

$$U=U'=U_1,\qquad \varepsilon=0.$$

On aura donc

$$(25)\quad -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1\frac{\partial U_1}{\partial u}+F_3\frac{\partial U_1}{\partial v}\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[F_2\frac{\partial U_1}{\partial v}+F_3\frac{\partial U_1}{\partial u}\right]+F_4U_1=0.$$

Soit $\overline{U}_1$ une intégrale de cette équation, telle que la courbe

$$\overline{U}_1=0$$

soit fermée; alors elle sera une des courbes cherchées. En effet, soit

$$f(u\,,\,v)=0$$

un contour situé tout à fait dans l'intérieur de la courbe

$$\overline{U}_1=0$$

on peut toujours trouver des fonctions B et B_1 pour lesquelles les conditions (19) sont remplies. Il suffit de poser dans l'équation (24)

$$U'=U,$$

on a donc

$$(26)\qquad -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1\frac{\partial U}{\partial u}+F_3\frac{\partial U}{\partial v}\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[F_2\frac{\partial U}{\partial v}+F_3\frac{\partial U}{\partial u}\right]+(F_4-\varepsilon)U=0.$$

Pour des valeurs très petites de ε, il existe certainement une intégrale U de cette équation, qui diffère très peu de l'intégrale $\overline{U}_1$ de l'équation (25) et qui, par conséquent, ne s'annulle pas dans l'intérieur de la courbe

$$f(u\,,v)=0.$$

On peut donc poser

$$B=\frac{V}{U},\qquad B_1=\frac{V'}{U},$$

où V et V' sont déterminées par (23) en faisant $U'=U$ et la condition (19) sera remplie.

Il ne peut exister une autre intégrale U_1' de l'équation (25), telle que la courbe

$$U_1'=0$$

soit située tout à fait dans l'intérieur de la courbe

$$\overline{U}_1=0.$$

Supposons qu'il en existe une, on a nécessairement

$$\iint\limits_{U'_1} U_1'\left\{-\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1\frac{\partial U_1'}{\partial u}+F_3\frac{\partial U_1'}{\partial v}\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[F_2\frac{\partial U_1'}{\partial v}+F_3\frac{\partial U_1'}{\partial u}\right]+F_4U_1'\right\}du\,dv=0$$

et en intégrant par partie, en observant que U_1' s'annulle aux limites

$$\iint\limits_{U'_1}\left\{F_1\left(\frac{\partial U_1'}{\partial u}\right)^2+F_2\left(\frac{\partial U_1'}{\partial v}\right)^2+2F_3\frac{\partial U_1'}{\partial u}\frac{\partial U_1'}{\partial v}+F_4U_1'^2\right\}du\,dv=0.$$

La courbe

$$U_1'=0$$

est située dans l'intérieur de la courbe

$$\overline{U}_1=0.$$

On peut donc trouver des fonctions B et B_1, telles que la condition (19) sera remplie. Mais alors la forme quadratique sous les signes sommes sera définie, d'où résulte nécessairement

$$U_1' = 0, \qquad \frac{\partial U_1'}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial U_1'}{\partial v} = 0$$

dans l'intérieur du contour considéré. L'intégrale U_1' est identiquement nulle.

De l'autre côté, si la courbe

$$\overline{U}_1 = 0$$

est située tout à fait dans l'intérieur du contour donné

$$f(u, v) = 0,$$

il est facile de voir qu'il ne peut exister ni un maximum ni un minimum pour l'intégrale considérée.

En effet, considérons la formule (20)

$$\Delta I = \frac{k^2}{\underline{|2}} \iint w\,\delta G\,du\,dv + \frac{k^3}{\underline{|3}} \delta^3 I + \ldots.$$

On a

$$\iint w\,\delta G\,du\,dv = \iint \left\{ F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + F_4 w^2 \right\} du\,dv.$$

Comme w s'annulle aux limites, on aura, en intégrant par partie

$$\iint w\,\delta G\,du\,dv$$

$$= \iint \left\{ -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1\frac{\partial w}{\partial u} + F_3\frac{\partial w}{\partial v}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[F_2\frac{\partial w}{\partial v} + F_3\frac{\partial w}{\partial u}\right] + (F_4 - l)w \right\} w\,du\,dv$$

$$+ l\iint w^2\,du\,dv.$$

Posons

$$(27) \qquad -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1\frac{\partial w}{\partial u} + F_3\frac{\partial w}{\partial v}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[F_2\frac{\partial w}{\partial v} + F_3\frac{\partial w}{\partial u}\right] + (F_4 - l)w = 0.$$

Pour des valeurs très petites de l, il existe certainement une intégrale de cette équation qui diffère très peu de l'intégrale $\overline{U}_1$ de l'équation (25). Alors la courbe

$$w = 0$$

est aussi située dans l'intérieur de la courbe

$$f(u, v).$$

Ainsi, en prenant pour w cette intégrale de l'équation (27), et en variant la surface seulement dans l'intérieur de la courbe

$$w = 0,$$

nous aurons

$$\iint w \partial G du dv = l \iint w^2 du dv$$

et

$$\Delta I = \frac{lk^2}{\underline{|2}} \iint w^2 du dv + \frac{k^3}{\underline{|3}} \partial^3 I + \ldots$$

mais, pour des valeurs assez petites de k, le signe du second membre dépend du signe de l, qui est arbitraire.

On peut donc varier la surface de façon que la variation totale ΔI prend des signes différents et, par conséquent, l'intégrale I ne peut pas être ni un maximum ni un minimum.

Ainsi les courbes

$$\overline{U}_1 = 0$$

jouent pour les intégrales doubles le même rôle que les points conjugués de Jacobi et de M. Weierstrass pour les intégrales simples.

Il reste à intégrer l'équation (25).

Nous avons trouvé

$$\iint w \partial G du dv$$

$$= \iint \left\{ -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1 \frac{\partial w}{\partial u} + F_3 \frac{\partial w}{\partial v}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[F_2 \frac{\partial w}{\partial v} + F_3 \frac{\partial w}{\partial u}\right] + F_4 w \right\} w du dv,$$

d'où on peut conclure

$$\partial G = -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1 \frac{\partial w}{\partial u} + F_3 \frac{\partial w}{\partial v}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[F_2 \frac{\partial w}{\partial v} + F_3 \frac{\partial w}{\partial u}\right] + F_4 w.$$

Il est facile de vérifier cela, en faisant les calculs précédents d'une manière un peu différente.

Si l'on a trouvé l'intégrale générale de l'équation

$$G = 0,$$

on peut, par conséquent, intégrer l'équation (25), qui maintenant se réduit à

$$\partial G = 0,$$

en suivant la même marche que JACOBI et M. WEIERSTRASS, quand il s'agit d'intégrer l'équation correspondante dans la théorie des intégrales simples.

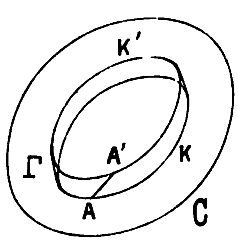
III Partie.

Sur la fonction $\mathcal{E}$.

Nous allons donner encore une condition pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum qui servira aussi à distinguer un maximum d'un minimum. Après cela nous démontrerons que, si toutes ces conditions sont remplies, l'intégrale I (1) étendue sur la surface donnée par l'équation

$$G = 0$$

sera dans le cas d'un maximum, plus grande, ou d'un minimum plus petite, que la même intégrale étendue sur toute autre surface régulière ou irrégulière passant par le même contour et différant très peu de la surface primitive. Nous appelons chaque surface qui est une intégrale de l'équation



$$G = 0$$

une surface G. Sur la surface G, qui passe par le contour donné C, nous traçons un certain contour fermé K et nous supposons que la tangente de ce contour ne change jamais brusquement sa direction. Par ce contour K nous faisons passer une surface régulière quelconque Γ et sur cette surface Γ nous traçons un autre contour K' aussi régulier, très voisin du contour K, et qui ne le coupe pas. Supposons qu'il existe une surface G qui passe par le contour K'. Par conséquent, le contour K' n'est pas tout à fait arbitraire, mais il existe toujours une infinité de contours K' qui ont la propriété demandée. Cette nouvelle surface G nous l'appelons G_1.

Considérons l'intégrale I (1) étendue sur la partie extérieure du contour K de la surface G, sur la partie de la surface Γ, qui est située entre les contours K et K' et sur la surface G_1. Cette intégrale que nous appelons I' peut être considérée comme une variation de l'intégrale I étendue sur toute la surface G.

Il faut alors pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum, que la différence

$$I' - I$$

conserve toujours un signe invariable, quels que soient les contours K et K' et la surface Γ.

Formons maintenant la différence

$$I' - I.$$

On voit, immédiatement, que l'on a

$$I' - I = \iint\limits_{K'} F du dv - \iint\limits_{K} F du dv + \iint\limits_{\Gamma} F du dv$$

et comme K' est très voisin de K, on a selon la formule I (5), en tenant compte de I (15)

(1) $$I' - I$$

$$= \iint\limits_{K} G w du dv + \int\limits_{K} \left\{ \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} \right] dv - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} \right] du \right\}$$

$$+ \iint\limits_{\Gamma} F du dv + (\ldots.)_2 + \ldots.$$

Mais, dans la première intégrale double l'intégration est étendue sur une surface G; alors cette intégrale s'annulle et nous aurons

$$(2)\qquad I' - I = \int\limits_{K} \left\{ \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} \right] dv - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z'} \right] du \right\}$$
$$+ \iint\limits_{\Gamma} F du dv + (\ldots\ldots)_2 + \cdots\cdot$$

Nous allons transformer cette expression dans une forme plus simple.

Supposons, que A' (fig. 1) soit le point du contour K', qui correspond au point A du contour K et projetons la distance AA' sur le plan tangent de la surface Γ dans le point A. En appelant l la longeur de la projection et a, b, c, ses cosinus directeurs, on aura

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi = al + (l)_2 + \cdots, \\ \eta = bl + (l)_2 + \cdots, \\ \zeta = cl + (l)_2 + \cdots. \end{cases}$$

La projection de AA' fait avec la tangente de K en A un certain angle ω. Ensuite nous appelons

$$\cos\alpha', \ \cos\beta', \ \cos\gamma'$$

les cosinus directeurs de la tangente de K en A,

$$\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma$$

les cosinus directeurs de la normale de la surface G en A,

$$\cos\bar{\alpha}, \ \cos\bar{\beta}, \ \cos\bar{\gamma}$$

les mêmes quantités pour la surface Γ,

$$\cos\alpha'', \ \cos\beta'', \ \cos\gamma''$$

les cosinus directeurs de la normale de K en A, qui est située dans la surface Γ, ds l'élément de l'arc du contour K, et

$$x', y', z', x'', y'', z'',$$
$$\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$$

les valeurs de

$$\frac{\partial x}{\partial u},\ \frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u},\ \frac{\partial x}{\partial v},\ \frac{\partial y}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial v}$$

pour les deux surfaces G et Γ. On a donc

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
&\cos\alpha' = x'\frac{\partial u}{\partial s} + x''\frac{\partial v}{\partial s} = \bar{x}'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar{x}''\frac{\partial v}{\partial s},\\
&\cos\beta' = y'\frac{\partial u}{\partial s} + y''\frac{\partial v}{\partial s} = \bar{y}'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar{y}''\frac{\partial v}{\partial s},\\
&\cos\gamma' = z'\frac{\partial u}{\partial s} + z''\frac{\partial v}{\partial s} = \bar{z}'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar{z}''\frac{\partial v}{\partial s},\\
&\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}}{\Delta},\quad \cos\beta = \frac{\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}}{\Delta},\quad \cos\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{\Delta},\\
&\Delta^2 = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2.\\
&\cos\bar{\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{y}' & \bar{y}'' \\ \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix}}{\bar{\Delta}},\quad \cos\bar{\beta} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{z}' & \bar{z}'' \\ \bar{x}' & \bar{x}'' \end{vmatrix}}{\bar{\Delta}},\quad \cos\bar{\gamma} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{x}' & \bar{x}'' \\ \bar{y}' & \bar{y}'' \end{vmatrix}}{\bar{\Delta}},\\
&\bar{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} \bar{y}' & \bar{y}'' \\ \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \bar{z}' & \bar{z}'' \\ \bar{x}' & \bar{x}'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \bar{x}' & \bar{x}'' \\ \bar{y}' & \bar{y}'' \end{vmatrix}^2,
\end{aligned}\right.$$

$$\cos\bar{\alpha}'' = \cos\bar{\beta}\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\bar{\gamma},\qquad \cos\bar{\beta}'' = \cos\bar{\gamma}\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\bar{\alpha},$$

$$\cos\bar{\gamma}'' = \cos\bar{\alpha}\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\bar{\beta}.$$

Enfin on a pour les cosinus directeurs de la projection de AA' sur le plan tangente les expressions

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}
a &= \cos\omega\cos\alpha' + \sin\omega\cos\bar{\alpha}'',\\
b &= \cos\omega\cos\beta' + \sin\omega\cos\bar{\beta}'',\\
c &= \cos\omega\cos\gamma' + \sin\omega\cos\bar{\gamma}''.
\end{aligned}\right.$$

L'intégrale double

$$\iint\limits_{\gamma} F du dv$$

est étendue sur la partie de la surface Γ qui est située entre les deux contours K et K' qui sont très voisins. Alors on peut transformer l'intégrale double en une intégrale simple prise le long du contour K. On a donc

$$du dv = \left(\frac{l \sin \omega}{\overline{\Delta}} + (l)_2 + \dots\right) ds$$

et par conséquent

$$\iint\limits_{\gamma} F du dv = \int\limits_{K} \overline{F} \frac{l \sin \omega ds}{\overline{\Delta}} + (l)_2 + \dots \tag{6}$$

en désignant par $\overline{F}$, ce que devient F en remplaçant $x', y', z', x'', y'', z''$ par $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$. Ensuite nous introduisons les valeurs de ξ, η, ζ tirées de (3) et (5) dans l'intégrale (2). On aura

$$\begin{aligned}
I - I = \int\limits_{K} l \Big\{ & \cos \omega \Big[\left(\cos \alpha' \frac{\partial F}{\partial x'} + \cos \beta' \frac{\partial F}{\partial y'} + \cos \gamma' \frac{\partial F}{\partial z'}\right) \frac{\partial v}{\partial s} \\
& - \left(\cos \alpha' \frac{\partial F}{\partial x''} + \cos \beta' \frac{\partial F}{\partial y''} + \cos \gamma' \frac{\partial F}{\partial z''}\right) \frac{\partial u}{\partial s} \Big] \\
& + \sin \omega \Big[\left(\cos \bar{\alpha}'' \frac{\partial F}{\partial x'} + \cos \bar{\beta}'' \frac{\partial F}{\partial y'} + \cos \bar{\gamma}'' \frac{\partial F}{\partial z'}\right) \frac{\partial v}{\partial s} \\
& - \left(\cos \bar{\alpha}'' \frac{\partial F}{\partial x''} + \cos \bar{\beta}'' \frac{\partial F}{\partial y''} + \cos \bar{\gamma}'' \frac{\partial F}{\partial z''}\right) \frac{\partial u}{\partial s} \Big] \Big\} ds \\
& + \int\limits_{K} \overline{F} \frac{l \sin \omega ds}{\overline{\Delta}} + (l)_2 + \dots .
\end{aligned} \tag{7}$$

Cette expression se simplifie beaucoup. D'abord on peut montrer que le coefficient de $\cos \omega$ dans la première intégrale s'annulle identiquement. En introduisant les valeurs

$$\cos \alpha' = x' \frac{\partial u}{\partial s} + x'' \frac{\partial v}{\partial s}, \qquad \cos \beta' = y' \frac{\partial u}{\partial s} + y'' \frac{\partial v}{\partial s}, \qquad \cos \gamma' = z' \frac{\partial u}{\partial s} + z'' \frac{\partial v}{\partial s},$$

on aura

$$(8)\quad \left(\cos\alpha'\frac{\partial F}{\partial x}+\cos\beta'\frac{\partial F}{\partial y}+\cos\gamma'\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial s}-\left(\cos\alpha'\frac{\partial F}{\partial x}+\cos\beta'\frac{\partial F}{\partial y}+\cos\gamma'\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$=\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}+z'\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s}+\left(x''\frac{\partial F}{\partial x}+y''\frac{\partial F}{\partial y}+z''\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2$$

$$-\left(x'\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}+z'\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2-\left(x''\frac{\partial F}{\partial x}+y''\frac{\partial F}{\partial y}+z''\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s},$$

mais on a I (4)

$$F = x'\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}+z'\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$0 = x''\frac{\partial F}{\partial x}+y''\frac{\partial F}{\partial y}+z''\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$0 = x'\frac{\partial F}{\partial x}+y'\frac{\partial F}{\partial y}+z'\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$F = x''\frac{\partial F}{\partial x}+y''\frac{\partial F}{\partial y}+z''\frac{\partial F}{\partial z}.$$

En vertu de ces relations, on voit que l'expression considérée (8) s'annulle.

Alors on peut écrire l'équation (7)

$$(9)\qquad I'-I=\int_K\left\{\left(\cos\bar\alpha''\frac{\partial F}{\partial x}+\cos\bar\beta''\frac{\partial F}{\partial y}+\cos\bar\gamma''\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial s}\right.$$

$$\left.-\left(\cos\bar\alpha''\frac{\partial F}{\partial x}+\cos\bar\beta''\frac{\partial F}{\partial y}+\cos\bar\gamma''\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\bar F}{\Delta}\right\}l\sin\omega ds+(l)_2+\ldots.$$

Pour la fonction entre les crochets sous le signe somme nous introduisons la notation

$$\mathcal{E}(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', \bar x', \bar y', \bar z', \bar x'', \bar y'', \bar z'')$$

ou comme abréviation

$$(10)\qquad \mathcal{E}=\left(\cos\bar\alpha''\frac{\partial F}{\partial x}+\cos\bar\beta''\frac{\partial F}{\partial y}+\cos\bar\gamma''\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$-\left(\cos\bar\alpha''\frac{\partial F}{\partial x}+\cos\bar\beta''\frac{\partial F}{\partial y}+\cos\bar\gamma''\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\bar F}{\Delta}.$$

Nous aurons donc

$$I' - I = \int_K \mathcal{E} l \sin \omega ds + (l)_2 + \dots. \tag{11}$$

Pour que l'intégrale I étendue sur la surface G soit un vrai maximum ou un vrai minimum, il faut, que la différence

$$I' - I$$

conserve toujours un signe invariable, quelle que soit la surface sur laquelle nous avons étendue l'intégrale I', c'est à dire, le signe — pour un maximum et le signe + pour un minimum.

Mais nous pouvons toujours choisir l si petite, que le signe du second membre de (11) ne dépende que du signe de son premier terme. Donc il est nécessaire que l'intégrale

$$\int_K \mathcal{E} l \sin \omega ds \tag{12}$$

conserve toujours le même signe pour chaque contour K et pour chaque surface I'. Mais alors il faut, que la fonction $\mathcal{E}$ conserve toujours le même signe, car si $\mathcal{E}$ peut changer son signe le long du contour K, il existe certainement une partie de la surface G, où $\mathcal{E}$ est positive et une autre, où $\mathcal{E}$ est négative. Donc, en choisissant le contour K dans l'une ou l'autre de ces parties, nous pouvons donner des signes différents à l'intégrale (12). On peut, évidemment, toujours supposer

$$l \sin \omega ds > 0.$$

Il peut se présenter que la fonction $\mathcal{E}$ s'annulle, mais alors, il faut qu'elle ne change pas son signe.

Après ces considérations, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

»Pour que l'intégrale double

$$\iint_C F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'') du dv$$

étendue sur la surface donnée par l'équation

$$G = 0$$

soit un maximum, il faut que la fonction

$$\mathcal{E}(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}'')$$

pour chaque point de la surface et pour chaque système de valeurs de

$$\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$$

ne soit jamais positive, et pour que l'intégrale soit un minimum il faut que la même fonction $\mathcal{E}$ ne soit jamais negative.»

Nous allons transformer la fonction $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E} = \left(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial F}{\partial x} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial F}{\partial y} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$-\left(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial F}{\partial x} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial F}{\partial y} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial F}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\bar{F}}{\Delta}.$$

Dans ce but partons des deux équations I (4)

$$F = x'\frac{\partial F}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y} + z'\frac{\partial F}{\partial z},$$

$$0 = x''\frac{\partial F}{\partial x} + y''\frac{\partial F}{\partial y} + z''\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Multiplions la première par x'', la seconde par $-x'$ et ajoutons

$$Fx'' = -(x'y'' - x''y')\frac{\partial F}{\partial y} + (z'x'' - z''x')\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Ensuite la première par y'' et la seconde par $-y'$

$$Fy'' = -(y'z'' - y''z')\frac{\partial F}{\partial z} + (x'y'' - x''y')\frac{\partial F}{\partial x}$$

et enfin, la première par z'' et la seconde par $-z'$

$$Fz'' = -(z'x'' - z''x')\frac{\partial F}{\partial x} + (y'z'' - y''z')\frac{\partial F}{\partial y}.$$

On aura ainsi le système

$$
(13) \qquad \left\{
\begin{aligned}
Fx'' &= \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} - \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}, \\
Fy'' &= \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} - \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z}, \\
Fz'' &= \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} - \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}.
\end{aligned}
\right.
$$

En permutant x' avec x'', x'' avec x' etcet. on aura un autre système

$$
(14) \qquad \left\{
\begin{aligned}
Fx' &= -\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y}, \\
Fy' &= -\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} + \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z}, \\
Fz' &= -\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}.
\end{aligned}
\right.
$$

Multiplions les équations (13) par $\frac{\partial v}{\partial s}$, les équations (14) par $\frac{\partial u}{\partial s}$ et ajoutons les deux premières équations dans les systèmes, ensuite les deux secondes et enfin, les deux troisièmes, nous aurons, en tenant compte des valeurs de $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$,

$$
(15) \qquad \left\{
\begin{aligned}
F\cos\alpha' = {} & \left[\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} - \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} \right] \frac{\partial v}{\partial s} \\
& - \left[\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} - \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} \right] \frac{\partial u}{\partial s}, \\
F\cos\beta' = {} & \left[\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} - \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} \right] \frac{\partial v}{\partial s} \\
& - \left[\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} - \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} \right] \frac{\partial u}{\partial s}, \\
F\cos\gamma' = {} & \left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} - \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \right] \frac{\partial v}{\partial s} \\
& - \left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} - \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \right] \frac{\partial u}{\partial s}.
\end{aligned}
\right.
$$

Multiplions la première par $\cos\alpha'$, la seconde par $\cos\beta'$, la troisième par $\cos\gamma'$ et ajoutons les équations nous aurons, en vertu des relations,

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} = \Delta\cos\alpha, \qquad \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} = \Delta\cos\beta, \qquad \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = \Delta\cos\gamma,$$

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

$$\begin{aligned} F = \Delta\Big[&(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')\frac{\partial F}{\partial x'} + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')\frac{\partial F}{\partial y'} \\ &+ (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')\frac{\partial F}{\partial z'}\Big]\frac{\partial u}{\partial s} \\ - \Delta\Big[&(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')\frac{\partial F}{\partial x''} + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')\frac{\partial F}{\partial y''} \\ &+ (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')\frac{\partial F}{\partial z''}\Big]\frac{\partial v}{\partial s}. \end{aligned}$$

En changeant $x', y', z', x'', y'', z''$ en $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$ nous aurons, enfin, en tenant compte de (4)

$$\begin{aligned} \bar{F} = \Big\{&\Big(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{x}'} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{y}'} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{z}'}\Big)\frac{\partial u}{\partial s} \\ &- \Big(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{x}''} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{y}''} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{z}''}\Big)\frac{\partial v}{\partial s}\Big\}\bar{\Delta}. \end{aligned}$$

Substituons cette valeur de $\bar{F}$ dans l'expression de $\mathcal{E}$, nous aurons la formule symmétrique

$$\begin{aligned} (16)\quad \mathcal{E} = &\Big[\cos\bar{\alpha}''\Big(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{x}'} - \frac{\partial F}{\partial x'}\Big) + \cos\bar{\beta}''\Big(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{y}'} - \frac{\partial F}{\partial y'}\Big) + \cos\bar{\gamma}''\Big(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{z}'} - \frac{\partial F}{\partial z'}\Big)\Big]\frac{\partial u}{\partial s} \\ &- \Big[\cos\bar{\alpha}''\Big(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{x}''} - \frac{\partial F}{\partial x''}\Big) + \cos\bar{\beta}''\Big(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{y}''} - \frac{\partial F}{\partial y''}\Big) + \cos\bar{\gamma}''\Big(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{z}''} - \frac{\partial F}{\partial z''}\Big)\Big]\frac{\partial v}{\partial s}. \end{aligned}$$

En employant les notations

$$x'_\mu = x' + \mu(\bar{x}' - x'), \qquad y'_\mu = y' + \mu(\bar{y}' - y'), \qquad z'_\mu = z' + \mu(\bar{z}' - z'),$$
$$x''_\mu = x'' + \mu(\bar{x}'' - x''), \qquad y''_\mu = y'' + \mu(\bar{y}'' - y''), \qquad z''_\mu = z'' + \mu(\bar{z}'' - z'')$$

et en appelant $F_\mu, F_1^{(\mu)}, F_2^{(\mu)}, F_3^{(\mu)}$ ce que deviennent F, F_1, F_2, F_3 si l'on a remplacé $x', y', z', x'', y'', z''$ par $x'_\mu, y'_\mu, z'_\mu, x''_\mu, y''_\mu, z''_\mu$, on aura suivant une formule connue du Calcul Différentiel:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar F}{\partial \bar x'} - \frac{\partial F}{\partial x'} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'^2_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y'_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial z'_\mu}(\bar z' - z') \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial x''_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y''_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial z''_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar F}{\partial \bar y'} - \frac{\partial F}{\partial y'} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial x'_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'^2_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial z'_\mu}(\bar z' - z') \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial x''_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial y''_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial z''_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar F}{\partial \bar z'} - \frac{\partial F}{\partial z'} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial x'_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial y'_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'^2_\mu}(\bar z' - z') \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial x''_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial y''_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial z''_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar F}{\partial \bar x''} - \frac{\partial F}{\partial x''} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial x'_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y'_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial z'_\mu}(\bar z' - z') \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''^2_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y''_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial z''_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar F}{\partial \bar y''} - \frac{\partial F}{\partial y''} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial x'_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial y'_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial z'_\mu}(\bar z' - z') \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial x''_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''^2_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial z''_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar F}{\partial \bar z''} - \frac{\partial F}{\partial z''} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial x'_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial y'_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial \ldots}(\ldots - z') \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial x''_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial y''_\mu}(\bar y'' - y'') + \text{[illegible]} - z'') \Big\} \ldots
\end{aligned}$$

Introduisons ensuite ces valeurs dans l'expression (16)

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad \mathcal{S} = \int_0^1 \Bigg\{ \Big[& (\bar{x}'' - x'')\Big(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''^2} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial y_\mu''} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial z_\mu''}\Big) \\
& + (\bar{y}'' - y'')\Big(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial y_\mu''} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu''^2} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu''\partial y_\mu''}\Big) \\
& + (\bar{z}'' - z'')\Big(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial z_\mu''} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu''\partial z_\mu''} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu''^2}\Big)\Big]\frac{\partial u}{\partial s} \\
- \Big[& (\bar{x}' - x')\Big(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'^2} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'\partial x_\mu'} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'\partial x_\mu'}\Big) \\
& + (\bar{y}' - y')\Big(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial y_\mu'} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'^2} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'\partial y_\mu'}\Big) \\
& + (\bar{z}' - z')\Big(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial z_\mu'} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'\partial z_\mu'} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'^2}\Big)\Big]\frac{\partial v}{\partial s} \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial x_\mu''}\Big[(\bar{x}' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar{x}'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}\Big]\cos\bar{\alpha}'' \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'\partial y_\mu''}\Big[(\bar{y}' - y')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar{y}'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s}\Big]\cos\bar{\beta}'' \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'\partial z_\mu''}\Big[(\bar{z}' - z')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar{z}'' - z'')\frac{\partial v}{\partial s}\Big]\cos\bar{\gamma}'' \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial y_\mu''}\Big[\cos\bar{\beta}''(\bar{x}' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\alpha}''(\bar{y}'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s}\Big] \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial y_\mu'}\Big[\cos\bar{\alpha}''(\bar{y}' - y')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\beta}''(\bar{x}'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}\Big] \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial z_\mu''}\Big[\cos\bar{\gamma}''(\bar{x}' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\alpha}''(\bar{z}'' - z'')\frac{\partial v}{\partial s}\Big] \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''\ [illegible]}\Big[\cos\bar{\alpha}''(\bar{z}' - z')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\ [illegible]\ - x'')\frac{\partial v}{\partial s}\Big] \\
& + [illegible]\Big[\cos\bar{\gamma}''(\bar{y}' - y')\frac{\partial u}{\partial s} - [illegible]\ z'')\frac{\partial v}{\partial s}\Big] \\
& + [illegible]\Big[[illegible]\ - z')\frac{\partial u}{\partial s} - [illegible]\ y'')\frac{\partial v}{\partial s}\Big]\Bigg\}\,d\mu.
\end{aligned}
$$

Pour simplifier cette expression on observe, d'abord, que les coefficients de $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y''_\mu}$, et $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y'_\mu}$ sont égaux. En effet, en les retranchant l'un de l'autre on aura

$$\cos\bar{\beta}''(\bar{x}' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\alpha}''(\bar{y}'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s} - \cos\bar{\alpha}''(\bar{y}' - y')\frac{\partial u}{\partial s} + \cos\bar{\beta}''(\bar{x}'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$= \cos\bar{\beta}''\left(\bar{x}'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar{x}''\frac{\partial v}{\partial s} - x'\frac{\partial u}{\partial s} - x''\frac{\partial v}{\partial s}\right)$$

$$- \cos\bar{\alpha}''\left(\bar{y}'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar{y}''\frac{\partial v}{\partial s} - y'\frac{\partial u}{\partial s} - y''\frac{\partial v}{\partial s}\right) = 0$$

suivant les relations (4).

Par le même procédé on trouvera que les coefficients de $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial z''_\mu}$ et $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial z'_\mu}$, sont égaux, ainsi que les coefficients de $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial z''_\mu}$ et $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial z'_\mu}$. On a donc

$$\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y''_\mu}\left[\cos\bar{\beta}''(\bar{x}' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\alpha}''(\bar{y}'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]$$

$$+ \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y'_\mu}\left[\cos\bar{\alpha}''(\bar{y}' - y')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\beta}''(\bar{x}'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y''_\mu} + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y'_\mu}\right)\left[\cos\bar{\beta}''\left[(\bar{x}' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar{x}'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\right.$$

$$\left. + \cos\bar{\alpha}''\left[(\bar{y}' - y')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar{y}'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\right]$$

et deux expressions analogues pour les autres dérivées.

Ensuite avec les notations

$$\alpha_\mu = \begin{vmatrix} y'_\mu & y''_\mu \\ z'_\mu & z''_\mu \end{vmatrix}, \qquad \beta_\mu = \begin{vmatrix} z'_\mu & z''_\mu \\ x'_\mu & x''_\mu \end{vmatrix}, \qquad \gamma_\mu = \begin{vmatrix} x'_\mu & x''_\mu \\ y'_\mu & y''_\mu \end{vmatrix}$$

on a après I (8)

$$
\begin{aligned}
&(\bar x'' - x'')\left[\cos\bar\alpha''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''^2} + \cos\bar\beta''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu''\,\partial x_\mu''} + \cos\bar\gamma''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu''\,\partial x_\mu''}\right]\\
&+ (\bar y'' - y'')\left[\cos\bar\alpha''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\,\partial y_\mu''} + \cos\bar\beta''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu''^2} + \cos\bar\gamma''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu''\,\partial y_\mu''}\right]\\
&+ (\bar z'' - z'')\left[\cos\bar\alpha''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\,\partial z_\mu''} + \cos\bar\beta''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu''\,\partial z_\mu''} + \cos\bar\gamma''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu''^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
= F_2^{(\mu)}[(\bar x''-x'')\alpha_\mu + (\bar y''-y'')\beta_\mu + (\bar z''-z'')\gamma_\mu][\alpha_\mu\cos\bar\alpha'' + \beta_\mu\cos\bar\beta'' + \gamma_\mu\cos\bar\gamma'']
$$

et de la même manière

$$
\begin{aligned}
&(\bar x' - x')\left[\cos\bar\alpha''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'^2} + \cos\bar\beta''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'\partial x_\mu'} + \cos\bar\gamma''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'\partial x_\mu'}\right]\\
&+ (\bar y' - y')\left[\cos\bar\alpha''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial y_\mu'} + \cos\bar\beta''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'^2} + \cos\bar\gamma''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'\partial y_\mu'}\right]\\
&+ (\bar z' - z')\left[\cos\bar\alpha''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial z_\mu'} + \cos\bar\beta''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'\partial z_\mu'} + \cos\bar\gamma''\,\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
= F_1^{(\mu)}[(\bar x'-x')\alpha_\mu + (\bar y'-y')\beta_\mu + (\bar z'-z')\gamma_\mu][\alpha_\mu\cos\bar\alpha'' + \beta_\mu\cos\bar\beta'' + \gamma_\mu\cos\bar\gamma'']
$$

et enfin

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial x_\mu''}\left[(\bar x'-x')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar x''-x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\cos\bar\alpha''\\
&+ \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'\partial y_\mu''}\left[(\bar y'-y')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar y''-y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\cos\bar\beta''\\
&+ \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'\partial z_\mu''}\left[(\bar z'-z')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar z''-z'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\cos\bar\gamma''\\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial y_\mu''} + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial y_\mu'}\right)\Bigg[\cos\bar\beta''\left[(\bar x'-x')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar x''-x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\\
&\qquad + \cos\bar\alpha''\left[(\bar y'-y')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar y''-y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\Bigg]\\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial z_\mu''} + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial z_\mu'}\right)\Bigg[\cos\bar\gamma''\left[(\bar x'-x')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar x''-x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\\
&\qquad + \cos\bar\alpha''\left[(\bar z'-z')\frac{\partial u}{\partial s} + (\bar z''-z'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\Bigg] +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial z''_\mu}+\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial z'_\mu}\right)\left[\cos\bar{\gamma}''\left[(\bar{y}'-y')\frac{\partial u}{\partial s}-(\bar{y}''-y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\right.$$

$$\left.+\cos\bar{\beta}''\left[(\bar{z}'-z')\frac{\partial u}{\partial s}+(\bar{z}''-z'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\right]$$

$$=F_3^{(\mu)}\Big\{[(\bar{x}'-x')\alpha_\mu+(\bar{y}'-y')\beta_\mu+(\bar{z}'-z')\gamma_\mu]\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$-[(\bar{x}''-x'')\alpha_\mu+(\bar{y}''-y'')\beta_\mu+(\bar{z}''-z'')\gamma_\mu]\frac{\partial v}{\partial s}\Big\}$$

$$\cdot[\alpha_\mu\cos\bar{\alpha}''+\beta_\mu\cos\bar{\beta}''+\gamma_\mu\cos\bar{\gamma}''].$$

Par conséquent, on aura

$$(18)\quad \mathcal{E}=\int_0^1[\alpha_\mu\cos\bar{\alpha}''+\beta_\mu\cos\bar{\beta}''+\gamma_\mu\cos\bar{\gamma}'']\Big\{\big[F_2^{(\mu)}[(\bar{x}''-x'')\alpha_\mu+(\bar{y}''-y'')\beta_\mu+(\bar{z}''-z'')\gamma_\mu]$$

$$-F_3^{(\mu)}[(\bar{x}'-x')\alpha_\mu+(\bar{y}'-y')\beta_\mu+(\bar{z}'-z')\gamma_\mu]\big]\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$-\big[F_1^{(\mu)}[(\bar{x}'-x')\alpha_\mu+(\bar{y}'-y')\beta_\mu+(\bar{z}'-z')\gamma_\mu]$$

$$-F_3^{(\mu)}[(\bar{x}''-x'')\alpha_\mu+(\bar{y}''-y'')\beta_\mu+(\bar{z}''-z'')\gamma_\mu]\big]\frac{\partial v}{\partial s}\Big\}d\mu.$$

Cette forme peut se simplifier encore. On a

$$\alpha_\mu\cos\bar{\alpha}''+\beta_\mu\cos\bar{\beta}''+\gamma_\mu\cos\bar{\gamma}''$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\bar{\alpha}'', & x'+\mu(\bar{x}'-x'), & x''+\mu(\bar{x}''-x'')\\ \cos\bar{\beta}'', & y'+\mu(\bar{y}'-y'), & y''+\mu(\bar{y}''-y'')\\ \cos\bar{\gamma}'', & z'+\mu(\bar{z}'-z'), & z''+\mu(\bar{z}''-z'')\end{vmatrix}=D.$$

En multipliant la second colonne par $\frac{\partial u}{\partial s}$ et en ajoutant la troisième multipliée par $\frac{\partial v}{\partial s}$, on trouve en vertu des relations (4)

$$D=\frac{\partial s}{\partial u}\begin{vmatrix}\cos\bar{\alpha}'', & \cos\alpha', & x''+\mu(\bar{x}''-x'')\\ \cos\bar{\beta}'', & \cos\beta', & y''+\mu(\bar{y}''-y'')\\ \cos\bar{\gamma}'', & \cos\gamma', & z''+\mu(\bar{z}''-z'')\end{vmatrix},$$

mais D s'annulle identiquement pour $\mu = 1$. Donc,

$$D = (1-\mu)\frac{\partial s}{\partial u}\begin{vmatrix} \cos\bar{\alpha}'', & \cos\alpha', & x'' \\ \cos\bar{\beta}'', & \cos\beta', & y'' \\ \cos\bar{\gamma}'', & \cos\gamma', & z'' \end{vmatrix}$$

$$= -(x''\cos\bar{\alpha} + y''\cos\bar{\beta} + z''\cos\bar{\gamma})(1-\mu)\frac{\partial s}{\partial u}.$$

Nous introduisons maintenant les notations

$$(19)\qquad \begin{cases} \rho' = \bar{x}'\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + \bar{y}'\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} + \bar{z}'\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}, \\[2ex] \rho'' = \bar{x}''\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + \bar{y}''\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} + \bar{z}''\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}, \\[2ex] -\bar{\rho}' = x'\begin{vmatrix} \bar{y}' & \bar{y}'' \\ \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix} + y'\begin{vmatrix} \bar{z}' & \bar{z}'' \\ \bar{x}' & \bar{x}'' \end{vmatrix} + z'\begin{vmatrix} \bar{x}' & \bar{x}'' \\ \bar{y}' & \bar{y}'' \end{vmatrix}, \\[2ex] -\bar{\rho}'' = x''\begin{vmatrix} \bar{y}' & \bar{y}'' \\ \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix} + y''\begin{vmatrix} \bar{z}' & \bar{z}'' \\ \bar{x}' & \bar{x}'' \end{vmatrix} + z''\begin{vmatrix} \bar{x}' & \bar{x}'' \\ \bar{y}' & \bar{y}'' \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Avec ces notations les relations

$$\cos\alpha'\cos\bar{\alpha} + \cos\beta'\cos\bar{\beta} + \cos\gamma'\cos\bar{\gamma} = 0,$$

$$\cos\alpha'\cos\alpha + \cos\beta'\cos\beta + \cos\gamma'\cos\gamma = 0$$

peuvent s'écrire

$$(20)\qquad \begin{cases} \bar{\rho}'\dfrac{\partial u}{\partial s} + \bar{\rho}''\dfrac{\partial v}{\partial s} = 0, \\[2ex] \rho'\dfrac{\partial u}{\partial s} + \rho''\dfrac{\partial v}{\partial s} = 0, \end{cases}$$

d'où suit

$$(21)\qquad \bar{\rho}'\rho'' - \bar{\rho}''\rho' = 0.$$

Nous aurons ainsi

$$D = \frac{\bar{\rho}'}{\Delta}(1-\mu)\frac{\partial s}{\partial u} = -\frac{\bar{\rho}'}{\Delta}(1-\mu)\frac{\partial s}{\partial v}$$

et de la même manière

$$(\bar{x}' - x')\alpha_\mu + (\bar{y}' - y')\beta_\mu + (\bar{z}' - z')\gamma_\mu = \rho' + \mu(\bar{\rho}' - \rho'),$$

$$(\bar{x}'' - x'')\alpha_\mu + (\bar{y}'' - y'')\beta_\mu + (\bar{z}'' - z'')\gamma_\mu = \rho'' + \mu(\bar{\rho}'' - \rho'').$$

Alors, la fonction $\mathcal{E}$ deviendra

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\Delta}\int_0^1 \Big\{ F_1^{(\mu)}\bar{\rho}'[\rho' + \mu(\bar{\rho}' - \rho')] - F_3^{(\mu)}\big[\bar{\rho}'[\rho'' + \mu(\rho'' - \rho'')] + \bar{\rho}''[\rho' + \mu(\bar{\rho}' - \rho')]\big]$$
$$+ F_2^{(\mu)}\bar{\rho}''[\rho'' + \mu(\bar{\rho}'' - \rho'')]\Big\}(1 - \mu)\,d\mu.$$

On a ensuite si $F_1^{(\bar{\mu})}$, $F_3^{(\bar{\mu})}$ et $F_2^{(\bar{\mu})}$ sont des valeurs moyennes

$$\int_0^1 F_1^{(\mu)}\bar{\rho}'[\rho' + \mu(\bar{\rho}' - \rho')](1 - \mu)\,d\mu = \frac{1}{6}F_1^{(\bar{\mu})}(\bar{\rho}'^2 + 2\bar{\rho}'\rho'),$$

$$\int_0^1 F_2^{(\mu)}\bar{\rho}''[\rho'' + \mu(\bar{\rho}'' - \rho'')](1 - \mu)\,d\mu = \frac{1}{6}F_2^{(\bar{\mu})}(\bar{\rho}''^2 + 2\bar{\rho}''\rho''),$$

$$\int_0^1 F_3^{(\mu)}\big[\bar{\rho}'[\rho'' + \mu(\bar{\rho}'' - \rho'')] + \bar{\rho}''[\rho' + \mu(\bar{\rho}' - \rho')]\big](1 - \mu)\,d\mu$$
$$= \frac{1}{3}F_3^{(\bar{\mu})}(\bar{\rho}'\bar{\rho}'' + \bar{\rho}'\rho'' + \bar{\rho}''\rho').$$

On trouve aussi

$$(\bar{\rho}'^2 + 2\bar{\rho}'\rho')(\bar{\rho}''^2 + 2\bar{\rho}''\rho'') - (\bar{\rho}'\bar{\rho}'' + \bar{\rho}'\rho'' + \bar{\rho}''\rho')^2 = -(\bar{\rho}'\rho'' - \bar{\rho}''\rho')^2 = 0.$$

Ainsi, en posant

$$\frac{1}{\Delta}\bar{\rho}'(\bar{\rho}' + 2\rho') = \tau'^2, \qquad \frac{1}{\Delta}\bar{\rho}''(\bar{\rho}'' + 2\rho'') = \tau''^2,$$

nous aurons

$$\frac{1}{\Delta}(\bar{\rho}'\bar{\rho}'' + \bar{\rho}'\rho'' + \bar{\rho}''\rho') = \tau'\tau''$$

et, enfin

$$\mathcal{E} = \frac{1}{6}\{F_1^{(\bar{\mu})}\tau'^2 - 2F_3^{(\bar{\mu})}\tau'\tau'' + F_2^{(\bar{\mu})}\tau''^2\}. \tag{22}$$

Pour que $\mathcal{E}$ conserve toujours un signe invariable, il faut et il suffit que

$$F_3^{(\bar{\mu})2} - F_1^{(\bar{\mu})}F_2^{(\bar{\mu})} < 0. \tag{23}$$

Nous avons ainsi retrouvé une condition analogue à II (18) mais plus générale que celle-ci. On voit maintenant pourquoi la considération de la seconde variation n'est pas suffisante pour distinguer un maximum ou un minimum.

Supposons donc que la condition (23) soit remplie, il reste à étudier le cas, où la fonction $\mathcal{E}$ s'annulle identiquement. Cela se présente seulement, si l'on a le long du contour K toujours

$$\tau' = 0, \qquad \tau'' = 0.$$

Comme les deux facteurs $\bar\rho'$ et $\bar\rho' + 2\rho'$ ainsi que $\bar\rho''$ et $\bar\rho'' + 2\rho''$ sont proportionels, en vertu des relations (20), il suffit à poser

$$-\frac{\bar\rho'}{\Delta\bar\Delta} = \frac{x'}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar y' & \bar y'' \\ \bar z' & \bar z''\end{vmatrix} + \frac{y'}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar z' & \bar z'' \\ \bar x' & \bar x''\end{vmatrix} + \frac{z'}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar x' & \bar x'' \\ \bar y' & \bar y''\end{vmatrix} = 0,$$

$$-\frac{\bar\rho''}{\Delta\bar\Delta} = \frac{x''}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar y' & \bar y'' \\ \bar z' & \bar z''\end{vmatrix} + \frac{y''}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar z' & \bar z'' \\ \bar x' & \bar x''\end{vmatrix} + \frac{z''}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar x' & \bar x'' \\ \bar y' & \bar y''\end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\frac{x'}{\Delta}\cos\bar\alpha + \frac{y'}{\Delta}\cos\bar\beta + \frac{z'}{\Delta}\cos\bar\gamma = 0,$$

$$\frac{x''}{\Delta}\cos\bar\alpha + \frac{y''}{\Delta}\cos\bar\beta + \frac{z''}{\Delta}\cos\bar\gamma = 0.$$

On aura donc

$$\cos\bar\alpha = k\cos\alpha, \qquad \cos\bar\beta = k\cos\beta, \qquad \cos\bar\gamma = k\cos\gamma,$$

mais

$$\cos^2\bar\alpha + \cos^2\bar\beta + \cos^2\bar\gamma = 1,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

et, par conséquent,

$$\cos\bar\alpha = \cos\alpha, \qquad \cos\bar\beta = \cos\beta, \qquad \cos\bar\gamma = \cos\gamma. \tag{24}$$

Dans ce cas la surface Γ est tangente à la surface G le long du contour K.

Supposons ensuite que les conditions II (19) soient satisfaites et que la fonction $\mathcal{E}$ pour chaque courbe sur la surface G conserve un signe invariable. Alors dans une certaine aire autour de la surface G, il n'existe pour chaque contour arbitraire qu'une seule surface G_1, qui satisfait à l'équation

$$G = 0$$

et qui diffère très peu de la surface primitive G.

Prenons dans cette aire un contour K_1 très voisin du contour K. Faisons passer par le contour K_1 une surface G_1 et formons la fonction $\mathcal{E}$ pour le contour K_1.

La fonction $\mathcal{E}$ a toujours le même signe pour le contour K et s'annulle pour

$$\cos\bar{\alpha} = \cos\alpha, \qquad \cos\bar{\beta} = \cos\beta, \qquad \cos\bar{\gamma} = \cos\gamma,$$

mais sans changer son signe. Alors si le contour K_1 est suffisamment voisin du contour K, $\mathcal{E}$ gardera le même signe pour le contour K_1. Ainsi, en resserrant, s'il le faut, notre aire, elle a les propriétés suivantes.

1) S'il existe dans cette aire une surface satisfaisante à l'équation

$$G = 0$$

et qui passe par un contour donné, il n'en existe qu'une seule, qui diffère très peu de la surface primitive.

2) La fonction $\mathcal{E}$ a toujours le même signe et s'annulle sans le changer.

On peut se demander, si dans l'aire considérée la fonction $\mathcal{E}$ peut s'annuler toujours sur une certaine surface, qui passe par le contour primitif C, et indépendante du contour d'intégration K (fig. 1). On voit que cela n'est possible que pour

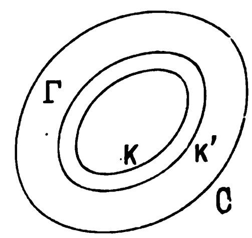
$$\cos\bar{\alpha} = \cos\alpha, \qquad \cos\bar{\beta} = \cos\beta, \qquad \cos\bar{\gamma} = \cos\gamma.$$

Dans ce cas la surface serait toujours tangente aux surfaces G, et, par conséquent, elle serait l'enveloppe de ces surfaces. Mais, on voit immédiatement que cette enveloppe ne peut pas être située dans l'aire considérée, car dans cette aire, il ne peut exister un contour qui est le lieu d'intersection de deux surfaces G infiniment voisines les unes des autres, et de la surface primitive.

Maintenant nous allons démontrer que s'il existe une telle aire A, l'intégrale I (1) étendue sur la surface donnée par l'équation

$$G = 0,$$

dans le cas d'un maximum est plus grande, et dans le cas d'un minimum plus petite que la même intégrale étendue sur toute autre surface régulière ou irrégulière, qui est située dans l'aire A et qui passe par le contour donné C.



Imaginons d'abord une surface régulière Γ passant par le contour C et située dans l'aire A. Sur la surface Γ nous traçons un certain contour K, de façon qu'il existe une surface G dans l'aire A, qui passe par K, et qui diffère très peu de la surface primitive G, et, ensuite, un autre K', qui a les mêmes propriétés et qui est très voisin de K.

Considérons l'intégrale I, étendue d'abord sur la partie de Γ au dehors de K', puis sur la surface G, qui passe par K'. La somme de ces deux intégrales soit:

$$S(\Omega + \partial\Omega)$$

si nous appelons Ω la partie de la surface Γ dans l'intérieur de K et $\partial\Omega$ la partie entre K et K'. De même, l'intégrale I étendue sur la partie au dehors de K et sur la surface G, qui passe par K soit

$$S(\Omega).$$

On aura donc

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = \iint\limits_{K'} F du dv - \iint\limits_{K} F du dv - \iint\limits_{K}^{K'} F du dv.$$

Dans les deux premières intégrales l'intégration est étendue sur des surfaces G, dans la dernière sur la surface Γ entre K et K'.

On voit facilement que le second membre n'est autre chose que

$$-\int\limits_{K} \mathcal{E} l \sin \omega ds + (\ldots\ldots)_2 + \ldots$$

ainsi

$$(25) \qquad S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\int\limits_{K} \mathcal{E} l \sin \omega ds + (\ldots\ldots)_2$$

et comme $\mathcal{E}$ a toujours le même signe

$$\int_K \mathcal{E} l \sin\omega ds = \mathcal{E}_m \int_K l \sin\omega ds = \mathcal{E}_m \partial\Omega, \tag{26}$$

si $\mathcal{E}_m$ est une valeur moyenne. Par conséquent

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\mathcal{E}_m \partial\Omega + (\ldots\ldots)_2 + \ldots$$

et

$$\lim_{l=0} \frac{S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega)}{\partial\Omega} = -\mathcal{E}_m,$$

$$\frac{\partial S(\Omega)}{\partial\Omega} = -\mathcal{E}_m. \tag{27}$$

Supposons donc qu'il s'agisse d'un maximum; alors

$$\mathcal{E}_m < 0$$

et, par conséquent, $S(\Omega)$ croît toujours avec Ω et atteint sa plus grande valeur quand K atteint le contour primitif C. Mais alors

$$S(\Omega) = \iint_G F du dv$$

et d'autre part

$$S_0 = \iint_\Gamma F du dv,$$

où dans les deux intégrales l'intégration est étendue jusqu'au contour C. Par conséquent

$$\iint_G F du dv > \iint_\Gamma F du dv. \tag{28}$$

C. Q. F. D.

Nous avions supposé que la surface Γ fût régulière, mais, il est facile de voir, que l'inégalité (28) subsiste encore, si la surface Γ est composée d'un nombre fini de surfaces régulières.

En effet, pour former la fonction $\mathcal{E}$ nous avons supposé que les deux contours K et K' sont réguliers. Mais, cela n'est pas indispensable, ils peuvent bien être composés d'un nombre fini de parties régulières.

Il suffit de partager l'intégrale dans un certain nombre d'autres et donner à l'angle ω des valeurs différentes dans chaque intégrale. Ainsi pour une telle surface Γ l'équation (25) devient

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\sum_{\mu=1}^{n} \int_{K_\mu} \mathcal{E}^{(\mu)} l_\mu \sin \omega_\mu ds_\mu + (\ldots .)_2 + \ldots .$$

Dans chaque intégrale les fonctions sous le signe somme sont continues.

Alors, si $\mathcal{E}_m^{(\mu)}$ est une valeur moyenne

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\sum_{\mu=1}^{n} \mathcal{E}_m^{(\mu)} \int_{K_\mu} l_\mu \sin \omega_\mu ds_\mu + (\ldots .)_2 + \ldots$$

mais

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int_{K_\mu} l_\mu \sin \omega_\mu ds_\mu = \partial\Omega,$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} \mathcal{E}_m^{(\mu)} \int_{K_\mu} l_\mu \sin \omega_\mu ds_\mu = \overline{\mathcal{E}}_m \partial\Omega$$

il en résulte que

$$\frac{\partial S(\Omega)}{\partial\Omega} = -\overline{\mathcal{E}}_m,$$

d'où suit que l'inégalité (28) subsiste encore

$$\iint_G F du dv > \iint_\Gamma F du dv.$$

Dans le cas d'un minimum on a

$$\mathcal{E} > 0$$

et donc, évidemment

$$\iint_G F du dv < \iint_\Gamma F du dv.$$

Supposons, enfin, que la surface Γ soit tout à fait irrégulière. Alors, en général, l'intégrale

$$\iint_\Gamma F du dv$$

n'a pas de sens. Dans le cas, où l'intégrale conserve un sens nous pouvons toujours construire une surface polyèdre Γ' très voisine de la surface Γ et telle que

$$\iint\limits_{\Gamma} F\,du\,dv - \int\limits_{\Gamma''} F\,du\,dv < \delta \tag{29}$$

où δ est une quantité arbitraire, dont on peut choisir la valeur absolue si petite que l'on veut. Maintenant nous construisons autour de la surface Γ une aire A', qui est située dans l'intérieur de A, mais, de telle sorte qu'au moins une partie de la surface G soit au dehors de l'aire A'.

Pour chaque surface polyèdre dans l'aire A' nous aurons (28)

$$\iint\limits_{G} F\,du\,dv - \iint\limits_{\Gamma''} F\,du\,dv > 0$$

s'il s'agit d'un maximum. Cette différence, n'étant jamais zéro, a, certainement, dans A' une limite inférieure. Alors, en choisissant une quantité positive h plus petite que cette limite, nous aurons

$$\iint\limits_{G} F\,du\,dv - \iint\limits_{\Gamma''} F\,du\,dv > h \tag{30}$$

pour chaque surface Γ'' dans l'aire A'. Fixons maintenant

$$|\delta| < h \tag{31}$$

et choisissons Γ'' telle que (29) soit remplie.

Alors il s'en suit de (29) et (30)

$$\iint\limits_{G} F\,du\,dv > \iint\limits_{\Gamma} F\,du\,dv + h - \delta$$

et en vertu de (31)

$$\iint\limits_{G} F\,du\,dv > \iint\limits_{\Gamma} F\,du\,dv.$$

Dans ce seul cas le raisonnement serait en défaut, si la surface Γ dans chacun de ses points était infiniment voisine de la surface G, car, alors, il serait impossible de construire l'aire A'.

Examinons un peu le principe de cette démonstration pour nous rendre compte du résultat, auquel nous sommes parvenus. Elle repose sur le fait que la fonction

$$S(\Omega)$$

est complètement définie, quand nous avons fixé le contour K. Mais elle l'est seulement, si nous nous bornons à considérer les surfaces G qui passent par K et qui diffèrent très peu de la surface primitive G. Cela veut dire que non seulement les valeurs des coordonnées dans les points correspondants mais aussi les valeurs de leurs *premières* dérivées sont très voisines. Avec cette restriction $S(\Omega)$ est complètement définie et, en faisant croître Ω, nous arrivons toujours à la même limite, à savoir,

$$\iint_G F du\, dv.$$

Nous faisons, enfin, un résumé des résultats obtenus:

»Pour que l'intégrale double,

$$\iint_G F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')du\, dv,$$

où F remplit les relations I (4), soit un maximum ou un minimum, si l'intégration est étendue sur la surface

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

il faut

1) que x, y, z satisfassent à l'équation I (18)

$$G = 0,$$

2) qu'elles satisfassent aux conditions II (19)

$$F_1 F_2 - F_3^2 > 0,$$

$$F_1 \left\{ (F_1 F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + F_4\right) - F_2 B^2 + 2F_3 BB_1 - F_1 B_1^2 \right\} > 0,$$

3) qu'elles donnent à la fonction $\mathcal{E}$ définie par III (10) un signe invariable, savoir, le signe — pour un maximum et le signe + pour un minimum.

Si ces conditions sont remplies, en nous bornant à considérer telles variations, où non seulement les variations des coordonnées mais aussi les variations de leurs premières dérivées sont infiniment petites, nous avons démontré que l'intégrale double, étendue sur la surface

$$x = x(u\,,\,v), \qquad y = y(u\,,\,v), \qquad z = z(u\,,\,v)$$

dans le cas d'un maximum est plus grande et dans le cas d'un minimum plus petite, que la même intégrale étendue sur toute autre surface régulière ou irrégulière, qui passe par le même contour et qui n'est qu'une variation infiniment petite de celle-là.»

NOTIZ ÜBER EINE METHODE ZUR NUMERISCHEN UMKEHRUNG GEWISSER TRANSCENDENTEN

VON

TH. LOHNSTEIN
in BERLIN.

Herr C. RUNGE hat im 15. Bande dieser Zeitschrift (S. 221) eine Methode zur numerischen Umkehrung der Exponential, Kreis- und elliptischen Functionen entwickelt, die, wie er glaubte (vgl. Nachschrift der betreffenden Abhandlung) bisher nur in dem Spezialfall der Berechnung von π bereits früher angewendet worden wäre. Ich erlaube mir zu bemerken, dass die Methode bereits sehr alt, wenn auch in neuerer Zeit vergessen worden ist und dass sie im wesentlichen auf die Benutzung der sogenannten *Stirlingschen Interpolationsreihe* hinausläuft. Es muss Herrn C. RUNGE das Verdienst gelassen werden, diese von ihm unabhängig aufgefundene Methode in ausserordentlich durchsichtiger und eleganter Weise begründet zu haben; Herr KARL SCHELLBACH aber war es, der in seinem Werke *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Thetafunctionen* (Berlin 1864, bei Reimer) diese Art der Berechnung zuerst auf die elliptischen Integrale angewandt hat, ohne allerdings wie Herr RUNGE den Grad der erlangten Annäherung allgemein festzustellen. Man erkennt leicht, dass die Formel (1) des § 159 in dem genannten Werke, wenn man sie bei einem endlichen Gliede abbricht, vollständig mit dem Resultate von Herrn RUNGE übereinkommt, nur dass sie sich auf die iterirte r-Theilung des Argumentes bezieht, während Herr RUNGE sich von vornherein auf die — practisch in der That nur in Betracht kommende — Zweitheilung beschränkt hat. Die etwas schwerfällige Darstellung SCHELLBACHS mag es verschulden, dass auch nach ihm die in Rede stehende Berechnungsmethode der Aufmerksamkeit der meisten Mathematiker bisher entgangen zu sein scheint.

ZUR THEORIE DES KRÜMMUNGSMAASSES DER FLÄCHEN

VON

R. VON LILIENTHAL
in MÜNSTER i/W.

Im 14ten Bande der Acta mathematica, S. 95 ff., führt Herr CASORATI ein neues Krümmungsmaass ein, das er dem GAUSS'schen an die Seite stellt. Indem ich die Beantwortung der Frage, welches von beiden vorzugsweise den Namen »Krümmungsmaass» verdiene, dahingestellt sein lasse, glaube ich die Wichtigkeit des CASORATI'schen Satzes darin erkennen zu dürfen, dass er einen, unabhängig von der analytischen Darstellung der Fläche, ausdrückbaren Begriff, somit etwas für die Krümmung der Fläche Characteristisches liefert. In diesem Sinne haben dann auch analoge Begriffe mit derselben Eigenschaft Interesse, die sich in Bezug auf das CASORATI'sche Krümmungsmaass ähnlich bilden lassen, wie ich dies bezüglich des GAUSS'schen in meiner Arbeit *Über eine besondere Art von Strahlensystemen* (Mathematische Annalen, Bd 31, S. 86) gethan habe. Um den folgenden Entwickelungen grössere Einheitlichkeit zu geben, werde ich die gedachten Resultate auf einfachere und directere Weise, wie am angeführten Orte, herleiten und sodann mit denselben Mitteln dem CASORATI'schen Satze analoge Sätze begründen.

Die Coordinaten x, y, z der Punkte einer Fläche, welche weder eine Kugel noch abwickelbar sei, betrachten wir als reguläre Functionen der unabhängigen Variablen p und q. Die Hauptkrümmungsradien seien ρ_1 und ρ_2; die Richtungscosinus der Tangenten der zu ρ_1 resp. ρ_2 gehörenden Krümmungslinien mögen mit A_1, B_1, C_1 resp. A_2, B_2, C_2 bezeichnet werden. Da jede durch den betrachteten Punkt (x, y, z) gehende Flächentangente in derselben Ebene liegt, wie die Tangenten der Krümmungslinien, müssen Darstellungen der Differentiale dx, dy, dz von folgender Form existiren:

$$dx = A_1 K_1 + A_2 K_2,$$
$$dy = B_1 K_1 + B_2 K_2,$$
$$dz = C_1 K_1 + C_2 K_2,$$

wo K_1 und K_2 lineare Formen von dp und dq bedeuten. Um dieselben zu bestimmen führen wir die Winkel σ und φ ein mittelst der Gleichungen:

$$\sqrt{L}\cos\sigma = A_1 \frac{\partial X}{\partial p} + B_1 \frac{\partial Y}{\partial p} + C_1 \frac{\partial Z}{\partial p},$$

$$\sqrt{L}\sin\sigma = A_2 \frac{\partial X}{\partial p} + B_2 \frac{\partial Y}{\partial p} + C_2 \frac{\partial Z}{\partial p},$$

$$\sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi) = A_1 \frac{\partial X}{\partial q} + B_1 \frac{\partial Y}{\partial q} + C_1 \frac{\partial Z}{\partial q},$$

$$\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi) = A_2 \frac{\partial X}{\partial q} + B_2 \frac{\partial Y}{\partial q} + C_2 \frac{\partial Z}{\partial q}.$$

Hier bedeuten X, Y, Z die Richtungscosinus der Normalen der Fläche und ausserdem ist gesetzt:

$$L = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)^2, \qquad N = \sum \left(\frac{\partial X}{\partial q}\right)^2.$$

Nimmt man:

$$H_1 = \sqrt{L}\cos\sigma dp + \sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi)dq,$$
$$H_2 = \sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq,$$

so entsteht:

$$dX = A_1 H_1 + A_2 H_2,$$
$$dY = B_1 H_1 + B_2 H_2,$$
$$dZ = C_1 H_1 + C_2 H_2.$$

Hieraus ersieht man, dass sowohl $H_2 = 0$ wie $K_2 = 0$ die Gleichung der zu ρ_1, und $H_1 = 0$ wie $K_1 = 0$ die Gleichung der zu ρ_2 gehörenden Krümmungslinien ist. Daher können sich H_1 und K_1, ebenso H_2 und K_2 nur durch von dp und dq unabhängige Factoren unterscheiden. Um dieselben zu finden, bemerken wir, dass der Krümmungsradius eines Normalschnitts der Fläche gegenwärtig durch die Gleichung:

$$\rho = -\frac{K_1^2 + K_2^2}{H_1 K_1 + H_2 K_2}$$

bestimmt wird, welche für $K_2 = 0$ den Werth ρ_1, für $K_1 = 0$ den Werth ρ_2 von ρ liefern muss. Daher ergiebt sich:

$$K_1 = -\rho_1 H_1, \qquad K_2 = -\rho_2 H_2,$$

und hieraus:

$$dx = -A_1\rho_1 H_1 - A_2\rho_2 H_2,$$
$$dy = -B_1\rho_1 H_1 - B_2\rho_2 H_2,$$
$$dz = -C_1\rho_1 H_1 - C_2\rho_2 H_2.$$

Im Folgenden haben wir ähnliche Darstellungen der Differentiale dA_1, dA_2 etc. nöthig. Um diese zu erhalten, projiciren wir die Gerade, deren Richtungscosinus $A_1 + \frac{\partial dA_1}{\partial H_2} H_2$, $B_1 + \frac{\partial dB_1}{\partial H_2} H_2$, $C_1 + \frac{\partial dC_1}{\partial H_2} H_2$ sind, und welche durch den Punkt mit den Coordinaten $x - \rho_2 A_2 H_2$, $y - \rho_2 B_2 H_2$, $z - \rho_2 C_2 H_2$ geht, auf die Tangentialebene. Die Projection schneidet die Gerade (A_1, B_1, C_1) in einem Punkte, dessen Abscisse in Bezug auf den Punkt (x, y, z) R_1 sei. Man hat dann:

$$R_1 = \frac{\rho_2}{\sum A_2 \frac{\partial dA_1}{\partial H_2}},$$

und ähnlich ergiebt sich:

$$R_2 = \frac{\rho_1}{\sum A_1 \frac{\partial dA_2}{\partial H_1}}.$$

R_1 und R_2 sind die geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien. Aus den Gleichungen:

$$\sum X \frac{\partial dA_1}{\partial H_1} = -1, \qquad \sum A_1 \frac{\partial dA_1}{\partial H_1} = 0, \qquad \sum A_2 \frac{\partial dA_1}{\partial H_1} = -\frac{\rho_1}{R_2}$$

folgt:

$$\frac{\partial dA_1}{\partial H_1} = -X - \frac{\rho_1}{R_2} A_2,$$

und aus den Gleichungen:

$$\sum X \frac{\partial dA_1}{\partial H_2} = 0, \qquad \sum A_1 \frac{\partial dA_1}{\partial H_2} = 0, \qquad \sum A_2 \frac{\partial dA_1}{\partial H_2} = \frac{\rho_2}{R_1}$$

folgt:

$$\frac{\partial dA_1}{\partial H_2} = A_2 \frac{\rho_2}{R_1}.$$

Man erhält somit:

$$dA_1 = -\left(\frac{\rho_1}{R_2} A_2 + X\right) H_1 + \frac{\rho_2}{R_1} A_2 H_2,$$

$$dB_1 = -\left(\frac{\rho_1}{R_2} B_2 + Y\right) H_1 + \frac{\rho_2}{R_1} B_2 H_2,$$

$$dC_1 = -\left(\frac{\rho_1}{R_2} C_2 + Z\right) H_1 + \frac{\rho_2}{R_1} C_2 H_2,$$

und analog:

$$dA_2 = \frac{\rho_1}{R_2} A_1 H_1 - \left(\frac{\rho_2}{R_1} A_1 + X\right) H_2,$$

$$dB_2 = \frac{\rho_1}{R_2} B_1 H_1 - \left(\frac{\rho_2}{R_1} B_1 + Y\right) H_2,$$

$$dC_2 = \frac{\rho_1}{R_2} C_1 H_1 - \left(\frac{\rho_2}{R_1} C_1 + Z\right) H_2.$$

Demselben Werthsystem p, q entspricht ein Element — O — der Fläche (x, y, z), ein Element — P_0 — der Kugel (X, Y, Z), ein Element — P_1 — der Kugel (A_1, B_1, C_1) und ein Element — P_2 — der Kugel (A_2, B_2, C_2). Die entwickelten Formeln zeigen nun, dass das Verhältniss $\frac{P_0}{O}$ durch den absoluten Werth von $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$, das Verhältniss $\frac{P_0}{O}$ durch den absoluten Werth von $\frac{1}{\rho_1 R_1}$, das Verhältniss $\frac{P_0}{O}$ durch den absoluten Werth von $\frac{1}{\rho_2 R_2}$ dargestellt wird. Sowie nun Gauss den Ausdruck $\frac{1}{\rho_1 \rho_2}$ als das Krümmungsmaass der Fläche bezeichnet, kann man die Ausdrücke $\frac{1}{\rho_1 R_1}$ und $\frac{1}{\rho_2 R_2}$

als die Maasse der tangentialen oder geodätischen Hauptkrümmungen der Fläche ansehen. Die Verschiedenheit der Vorzeichen bezieht sich dann auf die Art und Weise, wie die Krümmungslinien einer Schaar längs einer Krümmungslinie der anderen Schaar gelagert sind, und diese Lagerung bestimmt sich durch die Angabe, dass die Tangenten der ersten Schaar sich auf der einen oder anderen Seite der betrachteten Linie der zweiten Schaar treffen, eine Unterscheidung, welche hinfällig wird, wenn die der ersten Schaar entsprechende Krümmungsmittelpunktsfläche abwickelbar ist.

Gehen wir nun zu dem von Herrn Casorati aufgestellten Krümmungsmaass über. Man denke sich um den betrachteten Flächenpunkt P einen unendlich kleinen Kreis beschrieben, dessen als constant betrachteter Radius das Linearelement ds ist, dessen Flächeninhalt somit durch πds^2 gegeben wird. Jedem Radius dieses Kreises entspricht eine Nachbarnormale, und wenn man den Winkel τ, den eine solche mit der Normalen in P bildet, von P aus auf dem entsprechenden Radius aufträgt, so entsteht eine neue geschlossene Fläche, deren Flächeninhalt:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tau^2 d\alpha$$

ist, wo α den Winkel des radius vector mit einer festen, sonst beliebigen Tangentialrichtung bedeutet. Herr Casorati bezeichnet nun das Verhältniss des letzteren Flächeninhalts zum ersteren als Krümmungsmaass, sodass für dasselbe sich der Ausdruck:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tau^2}{ds^2} d\alpha$$

ergiebt, oder da: $\tau^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{H_1^2 + H_2^2}{ds^2} d\alpha.$$

Rechnet man den Winkel α von der Curve $H_2 = 0$ aus, so wird:

$$\cos\alpha = \frac{-\rho_1 H_1}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{-\rho_2 H_2}{ds},$$

und für jenes Krümmungsmaass, das mit C bezeichnet werde, ergiebt sich:

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right).$$

Man kann nun, um zu ähnlichen Ausdrücken zu gelangen, an Stelle von τ andere Winkel nehmen, die ebenfalls mit ds unendlich klein von der ersten Ordnung sind.

Zunächst bietet sich der Winkel dar, den die Tangenten zweier benachbarter Krümmungslinien derselben Schaar mit einander bilden.

Setzen wir:

$$C_1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2}{ds^2}d\alpha, \qquad C_2 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{dA_2^2 + dB_2^2 + dC_2^2}{ds^2}d\alpha,$$

so liefert eine einfache Rechnung die Werthe:

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{\rho_1^2}\right), \qquad C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right).$$

Betrachtet man ferner die Radien des oben erwähnten unendlich kleinen Kreises als die Anfangselemente einer sich von P aus nach allen Seiten über die Fläche hinerstreckenden Curvenschaar, so entsprechen den Endpunkten jedes Radius zwei benachbarte den betreffenden Fortschreitungsrichtungen conjugierte Tangenten, die sich unter dem Winkel ω schneiden mögen. Es frägt sich, welchen Werth alsdann der Ausdruck

$$K = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\omega^2}{ds^2}d\alpha$$

besitzt. Für den Winkel ω erhält man die Gleichung: (S. Mathematische Annalen, Bd. 31, S. 88)

$$\omega = \frac{\rho_1}{R_2}H_1 - \frac{\rho_2}{R_1}H_2 - \frac{H_1 dH_2 - H_2 dH_1}{H_1^2 + H_2^2},$$

woselbst der Ausdruck $H_1 dH_2 - H_2 dH_1$ durch das Gesetz, welches die gewählte Curvenschaar beherrscht, bestimmt wird.

Es seien zunächst die fraglichen Curven solche, deren conjugirte Tangenten mit den Tangenten der Krümmungslinien constante Winkel bilden.

Dann ist:

$$H_1 dH_2 - H_2 dH_1 = 0$$

und, falls hier der Werth von K mit K_1 bezeichnet wird, folgt:

$$K_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

Man hat daher den Satz:

$$C + 2K_1 = C_1 + C_2.$$

Zweitens legen wir den in Rede stehenden Curven die Bedingung auf, isogonale Trajectorien der Krümmungslinien zu sein. Dann bilden ihre Tangenten mit denen der Krümmungslinien constante Winkel und dies liefert die Differentialgleichung:

$$H_1 dH_2 - H_2 dH_1 = \frac{H_1 H_2(\rho_2 d\rho_1 - \rho_1 d\rho_2)}{\rho_1 \rho_2}.$$

Es werde nun:

$$d\rho_1 = \rho_{11} H_1 + \rho_{12} H_2,$$
$$d\rho_2 = \rho_{12} H_1 + \rho_{22} H_2$$

gesetzt. Aus den Integrabilitätsbedingungen der Differentiale dx, dy, dz folgt dann:

$$\rho_{12} = -\frac{(\rho_1 - \rho_2)\rho_1}{R_2},$$

$$\rho_{21} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)\rho_2}{R_1}.$$

Dadurch nimmt die Gleichung für ω die Form an:

$$\omega = \frac{1}{H_1^2 + H_2^2}\left\{\frac{\rho_1}{R_2} H_1^3 + \left(\frac{\rho_1 - 2\rho_2}{R_1} - \frac{\rho_{11}}{\rho_1}\right) H_1^2 H_2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2\rho_1 - \rho_2}{R_2} + \frac{\rho_{22}}{\rho_2}\right) H_1 H_2^2 - \frac{\rho_2}{R_1} H_2^3\right\}.$$

Bei der Berechnung von K treten 7 bestimmte Integrale auf, von denen 3 Null sind. Bei den übrigen 4 Integralen macht sich der Umstand bemerkbar, dass sie verschiedene Ausdrücke erhalten, je nachdem die Fläche im GAUSS'schen Sinne positiv oder negativ gekrümmt ist.

Man erhält bei positivem Werth des Produkts $\rho_1\rho_2$ die Gleichungen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{H_1^6}{(H_1^2 + H_2^2)^3 ds^2}\, d\alpha = \frac{\rho_2\pi(\rho_1^2 + 3\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)}{\rho_1^2(\rho_1 + \rho_2)^3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{H_1^4 H_2^2}{(H_1^2 + H_2^2)^3 ds^2}\, d\alpha = \frac{\rho_2\pi}{(\rho_1 + \rho_2)^3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{H_1^2 H_2^4}{(H_1^2 + H_2^2)^3 ds^2}\, d\alpha = \frac{\rho_1\pi}{(\rho_1 + \rho_2)^3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{H_1^6}{(H_1^2 + H_2^2)^3 ds^2}\, d\alpha = \frac{\rho_1\pi(\rho_1^2 + 3\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)}{\rho_2^2(\rho_1 + \rho_2)^3},$$

und aus diesen ergeben sich die bei negativem $\rho_1\rho_2$ statthabenden Gleichungen durch Ersetzten von ρ_1 durch $-\rho_1$.

Bezeichnen wir nun den Werth von K mit K_2 oder K_2', je nachdem $\rho_1\rho_2$ positiv oder negativ ist, so erhalten wir:

$$K_2 = \frac{1}{2(\rho_1 + \rho_2)^3}\left\{\frac{\rho_2(\rho_1 + \rho_2)^2 + 4\rho_1^3}{R_2^2} + \frac{\rho_1(\rho_1 + \rho_2)^2 + 4\rho_2^3}{R_1^2}\right.$$

$$\left. + \frac{4\rho_1^2\rho_{22}}{R_2\rho_2} + \frac{4\rho_2^2\rho_{11}}{R_1\rho_1} + \frac{\rho_{11}^2\rho_2}{\rho_1^2} + \frac{\rho_{22}^2\rho_1}{\rho_2^2}\right\},$$

$$2K_2' = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}\left(\frac{4\rho_2 - \rho_1}{R_1^2} + \frac{\rho_2 - 4\rho_1}{R_2^2}\right) + \frac{4}{(\rho_2 - \rho_1)^2}\left(\frac{\rho_2\rho_{11}}{R_1\rho_1} + \frac{\rho_1\rho_{22}}{R_2\rho_2}\right)$$

$$+ \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^3}\left(\frac{\rho_2\rho_{11}^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho_1\rho_{22}^2}{\rho_2^2}\right).$$

Endlich mögen die betrachteten Curven die Eigenschaft haben, geodätische Linien zu sein. Die Gleichung der letzteren ist: (Mathematische Annalen, Bd. 31, S. 92)

$$H_1 H_2(\rho_2 d\rho_1 - \rho_1 d\rho_2) + \rho_1\rho_2(H_2 dH_1 - H_1 dH_2) + ds^2\left(\frac{\rho_1}{R_2} H_1 - \frac{\rho_2}{R_1} H_2\right) = 0,$$

und dies liefert für ω die Gleichung:

$$\omega = \frac{\rho_1\rho_{12} H_1^3 - (\rho_2\rho_{11} - 2\rho_1\rho_{21}) H_1^2 H_2 - (2\rho_2\rho_{12} - \rho_1\rho_{22}) H_1 H_2^2 - \rho_2\rho_{21} H_2^3}{\rho_1\rho_2(H_1^2 + H_2^2)}.$$

Nennen wir den hier auftretenden Werth von K, je nachdem $\rho_1\rho_2$ positiv oder negativ ist, K_3 oder K_3', so folgt:

$$K_3 = \frac{1}{2\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1 + \rho_2)^3}\{(\rho_{12}^2\rho_2 + \rho_{21}^2\rho_1)(\rho_1^2 + 3\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)$$
$$+ \rho_{11}^2\rho_2^3 - 2\rho_{11}\rho_{21}\rho_1\rho_2^2 - 2\rho_{12}\rho_{22}\rho_2\rho_1^2 + \rho_{22}^2\rho_1^3\},$$

$$K_3' = \frac{1}{2\rho_1^2\rho_2^2(\rho_2 - \rho_1)^3}\{(\rho_{12}^2\rho_2 - \rho_{21}^2\rho_1)(\rho_1^2 - 11\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)$$
$$+ \rho_{11}^2\rho_2^3 - 6\rho_{11}\rho_{21}\rho_1\rho_2^2 + 6\rho_{12}\rho_{22}\rho_1^2\rho_2 - \rho_{22}^2\rho_1^3\}.$$

Wenn von den beiden Hauptkrümmungsradien der eine eine Function des anderen ist, was durch die Gleichung:

$$\rho_2 = f(\rho_1)$$

bezeichnet werden möge, so finden die Beziehungen statt:

$$\rho_{11} = \frac{\rho_2(\rho_1 - \rho_2)}{R_1 f'(\rho_1)},$$

$$\rho_{22} = -\frac{\rho_1(\rho_1 - \rho_2) f'(\rho_1)}{R_2}.$$

Dies liefert:

$$K_2 = \frac{1}{2(\rho_1 + \rho_2)^3}\left\{\frac{1}{R_2^2}\left[\rho_2(\rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_1^3\left(2 - \frac{(\rho_1 - \rho_2)f'(\rho_1)}{\rho_2}\right)^2\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{R_1^2}\left[\rho_1(\rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_2^3\left(2 + \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 f'(\rho_1)}\right)^2\right]\right\},$$

$$K_2' = \frac{1}{2(\rho_2 - \rho_1)}\left\{\frac{1}{R_1^2}\left[\rho_2\left(2 - \frac{\rho_2}{\rho_1 f'(\rho_1)}\right)^2 - \rho_1\right] - \frac{1}{R_2^2}\left[\rho_1\left(2 - \frac{\rho_1 f'(\rho_1)}{\rho_2}\right)^2 - \rho_2\right]\right\},$$

$$K_3 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{2(\rho_1 + \rho_2)^3}\left\{\frac{1}{R_2^2\rho_2^2}\left[\rho_2(\rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_1[\rho_2 - \rho_1 f'(\rho_1)]^2\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{R_1^2\rho_1^2}\left[\rho_1(\rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_2\left(\rho_1 - \frac{\rho_2}{f'(\rho_1)}\right)^2\right]\right\},$$

$$K_3' = \frac{1}{2(\rho_2 - \rho_1)}\left\{\frac{1}{R_2^2\rho_2^2}\{\rho_2(\rho_1 - \rho_2)^2 - \rho_1[3\rho_2 - \rho_1 f'(\rho_1)]^2\}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{R_1^2\rho_1^2}\left[\rho_1(\rho_1 - \rho_2)^2 - \rho_2\left(3\rho_1 - \frac{\rho_2}{f'(\rho_1)}\right)^2\right]\right\}.$$

Speciell für Minimalflächen ergiebt sich:

$$K_2' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right), \qquad K_3' = 2\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

Santiago de Chile, September 1890.

SUR LES VIBRATIONS LUMINEUSES DANS LES MILIEUX BIRÉFRINGENTS

PAR

VITO VOLTERRA

à PISE.

Introduction.

1. LAMÉ a consacré la 22ème et la 23ème de ses leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité à des recherches sur la possibilité d'un seul centre d'ébranlement dans la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents. Il observe que »lors d'une seule onde progressive produite à l'origine des coordonnées, centre unique d'ébranlement, un point M dont les coordonnées sont (x, y, z) sera agité à deux époques différentes

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{Q - \sqrt{Q^2 - 4qRP}}{2q}},$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{Q + \sqrt{Q^2 - 4qRP}}{2q}}$$

où

$$R = \Sigma x^2, \qquad P = \Sigma a^2 x^2, \qquad Q = \Sigma a^2(b^2 + c^2)x^2, \qquad q = a^2 b^2 c^2,$$

a, b, c, étant les axes d'élasticité.

»Si le centre d'ébranlement exécute une suite indéfinie de vibrations, le déplacement y sera représenté par les projections

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 \cos 2\pi \dfrac{t - \lambda_1}{\mathfrak{T}} + X_2 \cos 2\pi \dfrac{t - \lambda_2}{\mathfrak{T}}, \\ Y_1 \cos 2\pi \dfrac{t - \lambda_1}{\mathfrak{T}} + Y_2 \cos 2\pi \dfrac{t - \lambda_2}{\mathfrak{T}}, \\ Z_1 \cos 2\pi \dfrac{t - \lambda_1}{\mathfrak{T}} + Z_2 \cos 2\pi \dfrac{t - \lambda_2}{\mathfrak{T}} \end{array}\right.$$

(X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) étant des fonctions de (x, y, z) qui devront donner pour $(x = 0,\ y = 0,\ z = 0)$

$$X_1 + X_2 = X_0, \qquad Y_1 + Y_2 = Y_0, \qquad Z_1 + Z_2 = Z_0.»$$

Par suite LAMÉ s'est proposé de chercher les intégrales des équations

$$(2) \qquad \begin{cases} c^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) - b^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ a^2 \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) - c^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ b^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) - a^2 \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases}$$

qui ont la forme (1).

Par un calcul fort laborieux, conduit avec une grande habileté, il atteint le but de déterminer les fonctions inconnues $X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2$.

LAMÉ observe que ces fonctions sont indéterminées le long des parallèles aux axes optiques conduites par l'origine et sont infinies à l'origine.

En remplaçant dans les formules (1) les fonctions

$$\cos\frac{2\pi(t - \lambda_1)}{\mathfrak{T}}, \qquad \cos\frac{2\pi(t - \lambda_2)}{\mathfrak{T}}$$

par

$$F_1(t + \lambda_1) + \varphi_1(t - \lambda_1), \qquad F_2(t + \lambda_2) + \varphi_2(t - \lambda_2),$$

$F_1, \varphi_1, F_2, \varphi_2$ étant des fonctions arbitraires, u, v, w restent toujours des intégrales des équations (2).

Donc on a que

$$(3) \qquad \begin{cases} u = X_1\{F_1(t + \lambda_1) + \varphi_1(t - \lambda_1)\} + X_2\{F_2(t + \lambda_2) + \varphi_2(t - \lambda_2)\}, \\ v = Y_1\{F_1(t + \lambda_1) + \varphi_1(t - \lambda_1)\} + Y_2\{F_2(t + \lambda_2) + \varphi_2(t - \lambda_2)\}, \\ w = Z_1\{F_1(t + \lambda_1) + \varphi_1(t - \lambda_1)\} + Z_2\{F_2(t + \lambda_2) + \varphi_2(t - \lambda_2)\} \end{cases}$$

vérifient les équations de LAMÉ.

2. Les vibrations lumineuses dans un milieu isotrope dépendent de l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{4}$$

dont on a l'intégrale

$$u = \frac{F(r + Vt)}{r} + \frac{\varphi(r - Vt)}{r} \tag{5}$$

où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

et F, φ sont des fonctions arbitraires. Cette intégrale présente une analogie avec les intégrales (3) et comme elles, devient infinie à l'origine.

Il est connu qu'on peut déduire l'intégrale générale de l'équation (4) sous la forme donnée par Poisson, en partant de l'intégrale (5) et en supposant vérifié *a priori* le principe de Huyghens. C'est par là que M. Poincaré démontre dans ses leçons d'optique la vérité du principe de Huyghens. On peut maintenant se poser la question: Qu'est-ce qu'on trouve en appliquant le même procédé, lorsqu'on part des intégrales (3) et qu'on suppose vérifié le principe de Huyghens? Nous avons montré dans l'article 5 de ce mémoire, qu'on tire de là les fonctions que M^me Kowalevski a données comme intégrales générales des équations de Lamé. Si l'on pourrait vérifier que les formules trouvées de cette façon satisfont les équations de Lamé on aurait justifié l'emploi du principe de Huyghens.

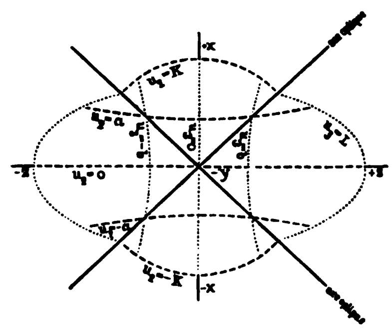
Mais nous avons montré dans l'article 5 que cette vérification n'est pas possible. D'où ressort ce résultat qui à première vue semble bien singulier?

3. Pour trouver le noeud de la question, il faut avoir devant les yeux la surface des ondes où l'on ait dessiné les systèmes des lignes sphériques et elliptiques qui forment les coordonnées curvilignes considérées par M. Weber. (Voir article 3.)

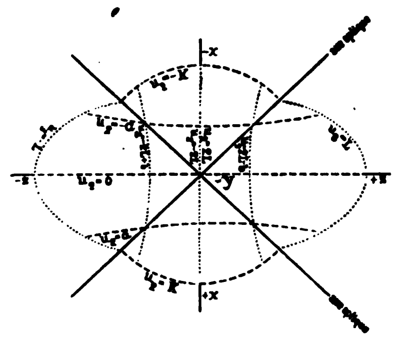
Prenons comme fait M. Weber

$$\begin{aligned} x &= b\,\mathrm{sn}(u_2, k)\,\mathrm{dn}(u_3, \mu), & k^2 &= \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \\ y &= a\,\mathrm{cn}(u_2, k)\,\mathrm{cn}(u_3, \mu), & & \\ z &= a\,\mathrm{dn}(u_2, k)\,\mathrm{sn}(u_3, \mu), & \mu^2 &= \frac{a^2}{b^2}\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}. \end{aligned}$$

Voici ce qu'on verrait en regardant la nappe extérieure de la surface des ondes du côté des y positives.[1]



Voici au contraire ce qu'on verrait en regardant la même nappe du côté des y négatives.



Ces figures montrent que u_3 est discontinue le long des lignes $u_2 = K$, $u_2 = -K$.

Prenons maintenant les premiers termes des intégrales (3). Nous avons trouvé dans ce mémoire (article 4) ces intégrales par un procédé tout à fait différent de celui suivi par Lamé. Les expressions sous lesquelles résultent les quantités X_1, Y_1, Z_1 sont

$$(6) \qquad -\frac{\mu^2 b \,\mathrm{sn}\, u_2 \,\mathrm{sn}\, u_3 \,\mathrm{cn}\, u_3}{a^2 u_1 \Delta}, \qquad -\frac{\mathrm{cn}\, u_2 \,\mathrm{sn}\, u_3 \,\mathrm{dn}\, u_3}{a u_1 \Delta}, \qquad \frac{\mathrm{dn}\, u_2 \,\mathrm{cn}\, u_3 \,\mathrm{dn}\, u_3}{a u_1 \Delta},$$

[1] $4K$ et $4L$ sont les périodes réelles correspondantes aux modules k, μ.

où

$$\Delta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_3 + (\mu^2 + k^2 - 1) \operatorname{sn}^2 u_2 \operatorname{sn}^2 u_3$$

et u_1 remplace le paramètre λ_1 de LAMÉ.

Ces expressions sont telles, qu'en prenant garde aux figures que nous avons dessinées, on voit bien aisément que X_1, Z_1 sont des fonctions polydromes des coordonnées x, y, z des points de l'espace. Pareillement on a que X_2, Z_2 sont des fonctions polydromes. Cette propriété ne s'aperçoit guère au premier abord, lorsqu'on examine ces quantités sous la forme que leur avait donnée LAMÉ.

C'est pourquoi il s'était trompé lorsqu'il avait cru qu'elles pouvaient représenter les vibrations lumineuses provenantes d'un centre d'ébranlement.

Ce sont les mêmes fonctions (6) qui paraissent dans le mémoire de M^me^ KOWALEVSKI. Lorsqu'on s'aperçoit qu'elles sont polydromes, on voit aussi que la méthode découverte par M. WEIERSTRASS pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles ne peut pas être appliquée pour intégrer les équations de LAMÉ en se servant des coordonnées de M. WEBER.

4. Le premier article de ce mémoire est consacré à la transformation des équations de l'optique de LAMÉ en coordonnées curvilignes.

J'applique les formules trouvées au cas particulier des coordonnées de M. WEBER. De cette façon je trouve, par un procédé[1] bien plus court que celui suivi par LAMÉ les intégrales (3) sous la forme que je viens d'indiquer. La discussion de ces intégrales est faite dans l'article 5. Dans l'article suivant je trouve un théorème analogue à celui de GREEN et j'y applique la méthode employée par KIRCHHOFF pour généraliser le principe de HUYGHENS. Enfin les derniers articles sont consacrés à trouver les intégrales générales des équations de l'optique en partant des intégrales de LAMÉ et en prenant garde à leur polydromie.

---

[1] Ce procédé ne diffère pas essentiellement de la méthode suivie par M. BRILL dans un mémoire [Math. Ann., 1er Vol.] que j'ai connu seulement après avoir rédigé mon travail.

Art. i. *Transformation des équations de Lamé en coordonnées curvilignes.*

i. Soient u, v, w les composantes du déplacement d'un point (x, y, z) d'un milieu élastique homogène.

En posant

$$
(1) \qquad \begin{cases}
U = \dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial y}, \\[2ex]
V = \dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z}, \\[2ex]
W = \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x},
\end{cases}
$$

les composantes des rotations des éléments du milieu, seront données par

$$\frac{1}{2} U, \ \frac{1}{2} V, \ \frac{1}{2} W.$$

Prenons les axes coordonnées x, y, z parallèles aux directions des axes d'élasticité, et soient

$$a > b > c$$

les axes d'élasticité.

On écrira les équations de Lamé de la manière suivante[1]

$$
(2) \qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial W}{\partial y} - b^2 \dfrac{\partial V}{\partial z}, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial U}{\partial z} - c^2 \dfrac{\partial W}{\partial x}, \\[2ex]
\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2 \dfrac{\partial V}{\partial x} - a^2 \dfrac{\partial U}{\partial y}.
\end{cases}
$$

Ces équations peuvent s'obtenir en annullant la variation d'une intégrale.

En effet, si l'on pose

$$(3) \qquad P = a^2 U^2 + b^2 V^2 + c^2 W^2,$$

[1] Lamé, *Leçons sur l'élasticité,* dix-septième leçon.

(4) $$T = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2,$$

(5) $$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_S (T - P)dSdt,$$

t_0, t_1 étant un intervalle arbitraire de l'espace, on aura

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1}\int_S \left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \delta v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \delta w}{\partial t}\right.$$

$$\left.-\left\{a^2 U\left(\frac{\partial \delta v}{\partial z} - \frac{\partial \delta w}{\partial y}\right) + b^2 V\left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{\partial \delta u}{\partial z}\right) + c^2 W\left(\frac{\partial \delta u}{\partial y} - \frac{\partial \delta v}{\partial x}\right)\right\}\right]dSdt.$$

Supposons que les variations $\delta u, \delta v, \delta w$ soient nulles aux limites des intégrales. Par des intégrations par partie on déduit de l'équation précédente

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1}\int_S \left[\delta u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial W}{\partial y} + b^2\frac{\partial V}{\partial z}\right) + \delta v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial U}{\partial z} + c^2\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right.$$

$$\left. + \delta w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial V}{\partial x} + a^2\frac{\partial U}{\partial y}\right)\right]dSdt.$$

On tire de là les équations (2) en posant

$$\delta I = 0.$$

2. Considérons maintenant un système de coordonnées curvilignes u_1, u_2, u_3. Soit

$$ds^2 = H_{11}du_1^2 + H_{22}du_2^2 + H_{33}du_3^2 + 2H_{23}du_2du_3 + 2H_{31}du_3du_1 + 2H_{12}du_1du_2$$

le carré de l'élément linéaire.

Posons

$$D^2 = \left|\frac{d(x, y, z)}{d(u_1, u_2, u_3)}\right|^2 = \begin{vmatrix} H_{11}, & H_{12}, & H_{13} \\ H_{21}, & H_{22}, & H_{23} \\ H_{31}, & H_{32}, & H_{33} \end{vmatrix}.$$

Désignons par t_1, t_2, t_3 les tangentes aux lignes

$$u_2 = \text{const.}, \qquad u_3 = \text{const.};$$
$$u_3 = \text{const.}, \qquad u_1 = \text{const.};$$
$$u_1 = \text{const.}, \qquad u_2 = \text{const.}$$

Les composantes des déplacements des points du milieu dans les directions t_1, t_2, t_3 étant v_1, v_2, v_3, on aura

$$u = v_1 \cos t_1 x + v_2 \cos t_2 x + v_3 \cos t_3 x = \frac{v_1}{\sqrt{H_{11}}}\frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{v_2}{\sqrt{H_{22}}}\frac{\partial x}{\partial u_2} + \frac{v_3}{\sqrt{H_{33}}}\frac{\partial x}{\partial u_3},$$

$$v = v_1 \cos t_1 y + v_2 \cos t_2 y + v_3 \cos t_3 y = \frac{v_1}{\sqrt{H_{11}}}\frac{\partial y}{\partial u_1} + \frac{v_2}{\sqrt{H_{22}}}\frac{\partial y}{\partial u_2} + \frac{v_3}{\sqrt{H_{33}}}\frac{\partial y}{\partial u_3},$$

$$w = v_1 \cos t_1 z + v_2 \cos t_2 z + v_3 \cos t_3 z = \frac{v_1}{\sqrt{H_{11}}}\frac{\partial z}{\partial u_1} + \frac{v_2}{\sqrt{H_{22}}}\frac{\partial z}{\partial u_2} + \frac{v_3}{\sqrt{H_{33}}}\frac{\partial z}{\partial u_3}.$$

Si l'on pose

$$(6) \qquad p_1 = \frac{v_1}{\sqrt{H_{11}}}, \qquad p_2 = \frac{v_2}{\sqrt{H_{22}}}, \qquad p_3 = \frac{v_3}{\sqrt{H_{33}}},$$

on trouvera

$$(7) \qquad \begin{cases} u = p_1 \dfrac{\partial x}{\partial u_1} + p_2 \dfrac{\partial x}{\partial u_2} + p_3 \dfrac{\partial x}{\partial u_3}, \\ v = p_1 \dfrac{\partial y}{\partial u_1} + p_2 \dfrac{\partial y}{\partial u_2} + p_3 \dfrac{\partial y}{\partial u_3}, \\ w = p_1 \dfrac{\partial z}{\partial u_1} + p_2 \dfrac{\partial z}{\partial u_2} + p_3 \dfrac{\partial z}{\partial u_3}. \end{cases}$$

Par un théorème bien connu on peut toujours trouver trois fonctions

$$\lambda, \mu, \nu,$$

telles que

$$(8) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial \lambda}{\partial x} + \nu \dfrac{\partial \mu}{\partial x}, \\ v = \dfrac{\partial \lambda}{\partial y} + \nu \dfrac{\partial \mu}{\partial y}, \\ w = \dfrac{\partial \lambda}{\partial z} + \nu \dfrac{\partial \mu}{\partial z}, \end{cases}$$

d'où

$$U = \frac{d(\mu, \nu)}{d(y, z)}, \qquad V = \frac{d(\mu, \nu)}{d(z, x)}, \qquad W = \frac{d(\mu, \nu)}{d(x, y)}.$$

On aura donc

$$U = \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_2, u_3)} \frac{d(u_2, u_3)}{d(y, z)} + \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_3, u_1)} \frac{d(u_3, u_1)}{d(y, z)} + \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_1, u_2)} \frac{d(u_1, u_2)}{d(y, z)}$$

$$= \frac{1}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_2, u_3)} \frac{\partial x}{\partial u_1} + \frac{1}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_3, u_1)} \frac{\partial x}{\partial u_2} + \frac{1}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_1, u_2)} \frac{\partial x}{\partial u_3}$$

$$= \frac{\sqrt{H_{11}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_2, u_3)} \cos t_1 x + \frac{\sqrt{H_{22}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_3, u_1)} \cos t_2 x + \frac{\sqrt{H_{33}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_1, u_2)} \cos t_3 x.$$

De même on trouve

$$V = \frac{\sqrt{H_{11}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_2, u_3)} \cos t_1 y + \frac{\sqrt{H_{22}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_3, u_1)} \cos t_2 y + \frac{\sqrt{H_{33}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_1, u_2)} \cos t_3 y,$$

$$W = \frac{\sqrt{H_{11}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_2, u_3)} \cos t_1 z + \frac{\sqrt{H_{22}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_3, u_1)} \cos t_2 z + \frac{\sqrt{H_{33}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_1, u_2)} \cos t_3 z.$$

C'est pourquoi les composantes des rotations des éléments du milieu dans les directions t_1, t_2, t_3, seront données par

$$\frac{1}{2} V_1 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{H_{11}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_2, u_3)},$$

$$\frac{1}{2} V_2 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{H_{22}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_3, u_1)},$$

$$\frac{1}{2} V_3 = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{H_{33}}}{D} \frac{d(\mu, \nu)}{d(u_1, u_2)}.$$

On tire des équations (8) et (7)

$$(9) \begin{cases} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u_1} + \nu \dfrac{\partial \mu}{\partial u_1} = u \dfrac{\partial x}{\partial u_1} + v \dfrac{\partial y}{\partial u_1} + w \dfrac{\partial z}{\partial u_1} = H_{11} p_1 + H_{12} p_2 + H_{13} p_3 = q_1, \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial u_2} + \nu \dfrac{\partial \mu}{\partial u_2} = u \dfrac{\partial x}{\partial u_2} + v \dfrac{\partial y}{\partial u_2} + w \dfrac{\partial z}{\partial u_2} = H_{12} p_1 + H_{22} p_2 + H_{23} p_3 = q_2, \\[2ex] \dfrac{\partial \lambda}{\partial u_3} + \nu \dfrac{\partial \mu}{\partial u_3} = u \dfrac{\partial x}{\partial u_3} + v \dfrac{\partial y}{\partial u_3} + w \dfrac{\partial z}{\partial u_3} = H_{13} p_1 + H_{23} p_2 + H_{33} p_3 = q_3, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_2\,,u_3)}=\frac{\partial q_2}{\partial u_3}-\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\,,$$

$$\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_3\,,u_1)}=\frac{\partial q_3}{\partial u_1}-\frac{\partial q_1}{\partial u_3}\,,$$

$$\frac{d(\mu\,,\nu)}{d(u_1\,,u_2)}=\frac{\partial q_1}{\partial u_2}-\frac{\partial q_2}{\partial u_1}\,,$$

et par suite

$$V_1=\frac{\sqrt{H_{11}}}{D}\left(\frac{\partial q_2}{\partial u_3}-\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right),$$

$$V_2=\frac{\sqrt{H_{22}}}{D}\left(\frac{\partial q_3}{\partial u_1}-\frac{\partial q_1}{\partial u_3}\right),$$

$$V_3=\frac{\sqrt{H_{33}}}{D}\left(\frac{\partial q_1}{\partial u_2}-\frac{\partial q_2}{\partial u_1}\right).$$

Posons

$$P_1=\frac{V_1}{\sqrt{H_{11}}},\qquad P_2=\frac{V_2}{\sqrt{H_{22}}},\qquad P_3=\frac{V_3}{\sqrt{H_{33}}}. \tag{10}$$

On aura pour les rotations des formules parfaitement analogues aux équations (7) que nous avons établies pour les déplacements:

$$\begin{aligned}
U&=P_1\frac{\partial x}{\partial u_1}+P_2\frac{\partial x}{\partial u_2}+P_3\frac{\partial x}{\partial u_3}\,,\\
V&=P_1\frac{\partial y}{\partial u_1}+P_2\frac{\partial y}{\partial u_2}+P_3\frac{\partial y}{\partial u_3}\,,\\
W&=P_1\frac{\partial z}{\partial u_1}+P_2\frac{\partial z}{\partial u_2}+P_3\frac{\partial z}{\partial u_3}.
\end{aligned} \tag{11}$$

3. Nous nous proposons maintenant d'exprimer les quantités T et P par les fonctions $p_1\,,p_2\,,p_3$; $P_1\,,P_2\,,P_3$. Il est bien facile de déduire des équations (7)

$$T=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2$$

$$=H_{11}\left(\frac{\partial p_1}{\partial t}\right)^2+H_{22}\left(\frac{\partial p_2}{\partial t}\right)^2+H_{33}\left(\frac{\partial p_3}{\partial t}\right)^2+2H_{23}\frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{\partial p_3}{\partial t}+2H_{31}\frac{\partial p_3}{\partial t}\frac{\partial p_1}{\partial t}+2H_{12}\frac{\partial p_1}{\partial t}\frac{\partial p_2}{\partial t}.$$

De même, en posant

$$K_{11} = a^2\left(\frac{\partial x}{\partial u_1}\right)^2 + b^2\left(\frac{\partial y}{\partial u_1}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial z}{\partial u_1}\right)^2,$$

$$K_{22} = a^2\left(\frac{\partial x}{\partial u_2}\right)^2 + b^2\left(\frac{\partial y}{\partial u_2}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial z}{\partial u_2}\right)^2,$$

$$K_{33} = a^2\left(\frac{\partial x}{\partial u_3}\right)^2 + b^2\left(\frac{\partial y}{\partial u_3}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial z}{\partial u_3}\right)^2,$$

$$K_{23} = a^2\frac{\partial x}{\partial u_2}\frac{\partial x}{\partial u_3} + b^2\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial y}{\partial u_3} + c^2\frac{\partial z}{\partial u_2}\frac{\partial z}{\partial u_3},$$

$$K_{31} = a^2\frac{\partial x}{\partial u_3}\frac{\partial x}{\partial u_1} + b^2\frac{\partial y}{\partial u_3}\frac{\partial y}{\partial u_1} + c^2\frac{\partial z}{\partial u_3}\frac{\partial z}{\partial u_1},$$

$$K_{12} = a^2\frac{\partial x}{\partial u_1}\frac{\partial x}{\partial u_2} + b^2\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial y}{\partial u_2} + c^2\frac{\partial z}{\partial u_1}\frac{\partial z}{\partial u_2},$$

on trouve

$$P = a^2U^2 + b^2V^2 + c^2W^2$$

$$= K_{11}P_1^2 + K_{22}P_2^2 + K_{33}P_3^2 + 2K_{23}P_2P_3 + 2K_{31}P_3P_1 + 2K_{12}P_1P_2.$$

4. On peut maintenant transformer les équations de Lamé en coordonnées curvilignes.

En effet, on aura

$$\frac{1}{2}\delta T = \frac{\partial p_1}{\partial t}\delta\left(H_{11}\frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{12}\frac{\partial p_2}{\partial t} + H_{13}\frac{\partial p_3}{\partial t}\right) + \frac{\partial p_2}{\partial t}\delta\left(H_{21}\frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{22}\frac{\partial p_2}{\partial t} + H_{23}\frac{\partial p_3}{\partial t}\right)$$

$$+ \frac{\partial p_3}{\partial t}\delta\left(H_{31}\frac{\partial p_1}{\partial t} + H_{32}\frac{\partial p_2}{\partial t} + H_{33}\frac{\partial p_3}{\partial t}\right) = \frac{\partial p_1}{\partial t}\frac{\partial \delta q_1}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{\partial \delta q_2}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial t}\frac{\partial \delta q_3}{\partial t}.$$

$$\frac{1}{2}\delta P = (K_{11}P_1 + K_{12}P_2 + K_{13}P_3)\delta P_1 + (K_{21}P_1 + K_{22}P_2 + K_{23}P_3)\delta P_2$$

$$+ (K_{31}P_1 + K_{32}P_2 + K_{33}P_3)\delta P_3$$

et en posant

$$(12) \qquad \begin{cases} K_{11}P_1 + K_{12}P_2 + K_{13}P_3 = Q_1, \\ K_{21}P_1 + K_{22}P_2 + K_{23}P_3 = Q_2, \\ K_{31}P_1 + K_{32}P_2 + K_{33}P_3 = Q_3 \end{cases}$$

on trouvera

$$\frac{1}{2}\delta P = \frac{1}{D}\left[Q_1\left(\frac{\partial \delta q_2}{\partial u_3} - \frac{\partial \delta q_3}{\partial u_2}\right) + Q_2\left(\frac{\partial \delta q_3}{\partial u_1} - \frac{\partial \delta q_1}{\partial u_3}\right) + Q_3\left(\frac{\partial \delta q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \delta q_2}{\partial u_1}\right)\right].$$

Par suite

$$\delta I = \delta \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S (T - P) D du_1 du_2 du_3 \tag{13}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \left\{ D\left[\frac{\partial p_1}{\partial t}\frac{\partial \delta q_1}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial t}\frac{\partial \delta q_2}{\partial t} + \frac{\partial p_3}{\partial t}\frac{\partial \delta q_3}{\partial t}\right]\right.$$

$$\left. - Q_1\left(\frac{\partial \delta q_2}{\partial u_3} - \frac{\partial \delta q_3}{\partial u_2}\right) - Q_2\left(\frac{\partial \delta q_3}{\partial u_1} - \frac{\partial \delta q_1}{\partial u_3}\right) - Q_3\left(\frac{\partial \delta q_1}{\partial u_2} - \frac{\partial \delta q_2}{\partial u_1}\right)\right\} du_1 du_2 du_3 .$$

Les variations δq_1, δq_2, δq_3 étant nulles aux limites des intégrales, l'équation précédente peut être remplacée par

$$\delta I = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int_S \left\{ \delta q_1\left[D\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_3}{\partial u_2} + \frac{\partial Q_2}{\partial u_3}\right] + \delta q_2\left[D\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_1}{\partial u_3} + \frac{\partial Q_3}{\partial u_1}\right]\right.$$

$$\left. + \delta q_3\left[D\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} - \frac{\partial Q_2}{\partial u_1} + \frac{\partial Q_1}{\partial u_2}\right]\right\} dS.$$

Donc, si $\delta I = 0$, on aura,

$$\left\{\begin{aligned} D\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial Q_3}{\partial u_2} - \frac{\partial Q_2}{\partial u_3}, \\ D\frac{\partial^2 p_2}{\partial t^2} &= \frac{\partial Q_1}{\partial u_3} - \frac{\partial Q_3}{\partial u_1}, \\ D\frac{\partial^2 p_3}{\partial t^2} &= \frac{\partial Q_2}{\partial u_1} - \frac{\partial Q_1}{\partial u_2}. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

Voilà les équations de LAMÉ transformées en coordonnées curvilignes.

5. Nous donnerons ici quelques formules dont nous nous servirons dans les articles suivants.

Les équations (9) résolues par rapport à u, v, w, donnent

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} u &= q_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + q_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + q_3\frac{\partial u_3}{\partial x},\\ v &= q_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + q_2\frac{\partial u_2}{\partial y} + q_3\frac{\partial u_3}{\partial y},\\ w &= q_1\frac{\partial u_1}{\partial z} + q_2\frac{\partial u_2}{\partial z} + q_3\frac{\partial u_3}{\partial z}.\end{aligned}\right.$$

Ajoutons les équations (12) après les avoir multipliées par $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_3}{\partial x}$. On trouvera

$$\begin{aligned} &Q_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial x}\\ &= P_1\left(K_{11}\frac{\partial u_1}{\partial x} + K_{12}\frac{\partial u_2}{\partial x} + K_{13}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\\ &+ P_2\left(K_{21}\frac{\partial u_1}{\partial x} + K_{22}\frac{\partial u_2}{\partial x} + K_{23}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\\ &+ P_3\left(K_{31}\frac{\partial u_1}{\partial x} + K_{32}\frac{\partial u_2}{\partial x} + K_{33}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)\\ &= a^2\left[P_1\frac{\partial x}{\partial u_1} + P_2\frac{\partial x}{\partial u_2} + P_3\frac{\partial x}{\partial u_3}\right]\end{aligned}$$

d'où

$$(16')\qquad a^2U = Q_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial x}.$$

De même on aura

$$(16'')\qquad b^2V = Q_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial y} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial y},$$

$$(16''')\qquad c^2W = Q_1\frac{\partial u_1}{\partial z} + Q_2\frac{\partial u_2}{\partial z} + Q_3\frac{\partial u_3}{\partial z}.$$

6. Nous venons de transformer les équations de LAMÉ en suivant la méthode ordinaire, c'est à dire en reconduisant la question par les principes du calcul des variations à la transformation d'une intégrale. On peut faire la transformation par un autre procédé très-simple que je vais exposer en peu de mots.

Soit σ une surface quelconque dont le bord est formé par la ligne s et soit n la normale à cette surface. Désignons par λ et μ des coordonnées curvilignes des points de la surface. En multipliant les équations (1), (2) par

$$\cos nx\, d\sigma = \frac{d(y\,,z)}{d(\lambda\,,\mu)}\, d\lambda\, d\mu,$$

$$\cos ny\, d\sigma = \frac{d(z\,,x)}{d(\lambda\,,\mu)}\, d\lambda\, d\mu,$$

$$\cos nz\, d\sigma = \frac{d(x\,,y)}{d(\lambda\,,\mu)}\, d\lambda\, d\mu$$

et en intégrant sur toute la surface σ, on trouve par le théorème de STOKES

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_\sigma \left[U\frac{d(y\,,z)}{d(\lambda\,,\mu)} + V\frac{d(z\,,x)}{d(\lambda\,,\mu)} + W\frac{d(x\,,y)}{d(\lambda\,,\mu)}\right] d\lambda\, d\mu \\ &\qquad = \int_s (u\,dx + v\,dy + w\,dz), \\ &\frac{d^2}{dt^2}\int_\sigma \left[u\frac{d(y\,,z)}{d(\lambda\,,\mu)} + v\frac{d(z\,,x)}{d(\lambda\,,\mu)} + w\frac{d(x\,,y)}{d(\lambda\,,\mu)}\right] d\lambda\, d\mu \\ &\qquad = \int_s (a^2 U\,dx + b^2 V\,dy + c^2 W\,dz). \end{aligned}\right.$$

Si nous posons

$$\left\{\begin{aligned} U &= P_1\frac{\partial x}{\partial u_1} + P_2\frac{\partial x}{\partial u_2} + P_3\frac{\partial x}{\partial u_3}, \\ V &= P_1\frac{\partial y}{\partial u_1} + P_2\frac{\partial y}{\partial u_2} + P_3\frac{\partial y}{\partial u_3}, \\ W &= P_1\frac{\partial z}{\partial u_1} + P_2\frac{\partial z}{\partial u_2} + P_3\frac{\partial z}{\partial u_3}, \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} u &= p_1\frac{\partial x}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial x}{\partial u_2} + p_3\frac{\partial x}{\partial u_3}, \\ v &= p_1\frac{\partial y}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial y}{\partial u_2} + p_3\frac{\partial y}{\partial u_3}, \\ w &= p_1\frac{\partial z}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial z}{\partial u_2} + p_3\frac{\partial z}{\partial u_3} \end{aligned}\right.$$

il est évident qu'on trouve

$$U\frac{d(y\,,z)}{d(\lambda\,,\mu)} + V\frac{d(z\,,x)}{d(\lambda\,,\mu)} + W\frac{d(x\,,y)}{d(\lambda\,,\mu)}$$

$$= D\left[P_1\frac{d(u_2\,,u_3)}{d(\lambda\,,\mu)} + P_2\frac{d(u_3\,,u_1)}{d(\lambda\,,\mu)} + P_3\frac{d(u_1\,,u_2)}{d(\lambda\,,\mu)}\right],$$

$$u\frac{d(y\,,z)}{d(\lambda\,,\mu)} + v\frac{d(z\,,x)}{d(\lambda\,,\mu)} + w\frac{d(x\,,y)}{d(\lambda\,,\mu)}$$

$$= D\left[p_1\frac{d(u_2\,,u_3)}{d(\lambda\,,\mu)} + p_2\frac{d(u_3\,,u_1)}{d(\lambda\,,\mu)} + p_3\frac{d(u_1\,,u_2)}{d(\lambda\,,\mu)}\right].$$

Examinons les deux formes quadratiques

$$2f = u^2 + v^2 + w^2$$

$$= H_{11}p_1^2 + H_{22}p_2^2 + H_{33}p_3^2 + 2H_{23}p_2p_3 + 2H_{31}p_3p_1 + 2H_{12}p_1p_2,$$

$$2\varphi = a^2U^2 + b^2V^2 + c^2W^2$$

$$= K_{11}P_1^2 + K_{22}P_2^2 + K_{33}P_3^2 + 2K_{23}P_2P_3 + 2K_{31}P_3P_1 + 2K_{12}P_1P_2.$$

Par des théorèmes bien connus on aura

$$\frac{\partial f}{\partial u}dx + \frac{\partial f}{\partial v}dy + \frac{\partial f}{\partial w}dz = \frac{\partial f}{\partial p_1}du_1 + \frac{\partial f}{\partial p_2}du_2 + \frac{\partial f}{\partial p_3}du_3,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial U}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial V}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial W}dz = \frac{\partial \varphi}{\partial P_1}du_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial P_2}du_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial P_3}du_3.$$

Par suite, en posant

$$\frac{\partial f}{\partial p_1} = q_1, \qquad \frac{\partial f}{\partial p_2} = q_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial p_3} = q_3,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial P_1} = Q_1, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial P_2} = Q_2, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial P_3} = Q_3$$

on trouvera

$$udx + vdy + wdz = q_1du_1 + q_2du_2 + q_3du_3,$$

$$a^2Udx + b^2Vdy + c^2Wdz = Q_1du_1 + Q_2du_2 + Q_3du_3.$$

On pourra donc substituer aux équations (17) les deux équations

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_\sigma D\left[P_1\frac{d(u_2\,,\,u_3)}{d(\lambda\,,\,\mu)}+P_2\frac{d(u_3\,,\,u_1)}{d(\lambda\,,\,\mu)}+P_3\frac{d(u_1\,,\,u_2)}{d(\lambda\,,\,\mu)}\right]d\lambda d\mu\\
&\qquad\qquad=\int_s(q_1du_1+q_2du_2+q_3du_3),\\
&\frac{d^2}{dt^2}\int_\sigma D\left[p_1\frac{d(u_2\,,\,u_3)}{d(\lambda\,,\,\mu)}+p_2\frac{d(u_3\,,\,u_1)}{d(\lambda\,,\,\mu)}+p_3\frac{d(u_1\,,\,u_2)}{d(\lambda\,,\,\mu)}\right]d\lambda d\mu\\
&\qquad\qquad=\int_s(Q_1du_1+Q_2du_2+Q_3du_3).
\end{aligned}\right.$$

De ces équations, par le théorème de STOKES découlent tout de suite les équations (10) et (14).

ART. 2. *Les équations de Lamé et leurs équations conjuguées.*

1. La transformation des équations de LAMÉ en coordonnées curvilignes nous a conduit aux équations

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}
&D\frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2}=\frac{\partial Q_{s+2}}{\partial u_{s+1}}-\frac{\partial Q_{s+1}}{\partial u_{s+2}},\\
&Q_i=\Sigma_s K_{is}P_s,\\
&P_s=\frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{s+1}}{\partial u_{s+2}}-\frac{\partial q_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right),\\
&q_i=\Sigma_s H_{is}p_s.
\end{aligned}\right.\qquad (s=1,2,3)$$

Posons

$$m_s=\frac{1}{D}\left(\frac{\partial Q_{s+1}}{\partial u_{s+2}}-\frac{\partial Q_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right)$$

on aura

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial t^2}=-m_s,$$

Par conséquent, si

$$\Sigma_s H_{is}m_s=n_i$$

on trouvera

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial t^2} = -n_i,$$

d'où

$$D\frac{\partial^2 P_s}{\partial t^2} = \frac{\partial n_{s+2}}{\partial u_{s+1}} - \frac{\partial n_{s+1}}{\partial u_{s+2}}.$$

En remplaçant P_s par M_s, et Q_s par N_s on pourra écrire le système d'équations

$$(2)\qquad \begin{cases} D\dfrac{\partial^2 M_s}{\partial t^2} = \dfrac{\partial n_{s+2}}{\partial u_{s+1}} - \dfrac{\partial n_{s+1}}{\partial u_{s+2}}, \\ n_i = \Sigma_s H_{is} m_s, \\ m_s = \dfrac{1}{D}\left(\dfrac{\partial N_{s+1}}{\partial u_{s+2}} - \dfrac{\partial N_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right), \qquad (s=1,2,3) \\ N_i = \Sigma_s K_{is} M_s. \end{cases}$$

2. Lorsqu'on connaît un système d'intégrales

$$p_s\,,\ P_s\,,\ q_s\,,\ Q_s$$

des équations (1) on aura tout de suite des intégrales des équations (2).

Il suffit pour cela de prendre

$$(3)\qquad \begin{cases} M_s = P_s, & N_s = Q_s, \\ m_s = -\dfrac{\partial^2 p_s}{\partial t^2}, & n_s = -\Sigma_i H_{is}\dfrac{\partial^2 p_i}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Réciproquement à toute intégrale des équations (2) correspond une intégrale du système (1). En effet en prenant

$$(4)\qquad \begin{cases} p_s = m_s, & q_s = n_s, \\ P_s = -\dfrac{\partial^2 M_s}{\partial t^2}, & Q_s = -\Sigma_i K_{is}\dfrac{\partial^2 M_i}{\partial t^2} \end{cases}$$

on aura que ces fonctions satisfont aux équations (1).

3. On peut maintenant poser la question:

A quelles intégrales

$$p_s\,,\ q_s\,,\ P_s\,,\ Q_s$$

des équations (1) correspondent des intégrales

$$m_s\,,\ n_s\,,\ M_s\,,\ N_s$$

du système (2) telles que les relations (4) soient vérifiées?

Il est facile de démontrer qu'il suffit de la condition

$$\frac{\partial(Dp_1)}{\partial u_1}+\frac{\partial(Dp_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(Dp_3)}{\partial u_3}=0 \tag{5}$$

pour que les équations (4) soient satisfaites.

En effet, il ressort de (5) que l'on pourra poser

$$p_s = m_s = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial N_{s+1}}{\partial u_{s+2}}-\frac{\partial N_{s+2}}{\partial u_{s+1}}\right)$$

d'où découlent les équations (4). De même à tout système d'intégrales

$$m_s\,,\ n_s\,,\ M_s\,,\ N_s$$

des équations (2) telles que

$$\frac{\partial(DM_1)}{\partial u_1}+\frac{\partial(DM_2)}{\partial u_2}+\frac{\partial(DM_3)}{\partial u_3}=0 \tag{6}$$

correspond un système d'intégrales des équations (1) lié au précédent par les relations (3).

4. Il est aisé de démontrer que si l'équation (5) est vérifiée les vibrations sont transversales.

En effet soit

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}.$$

En multipliant cette quantité par une fonction λ indéterminée et en intégrant sur un espace S quelconque on trouve

$$\int_S \lambda\theta dxdydz = \int_S \left(u\frac{\partial\lambda}{\partial x} + v\frac{\partial\lambda}{\partial y} + w\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)dS,$$

λ étant nulle au contour de l'espace S. Mais

$$u\frac{\partial\lambda}{\partial x} + v\frac{\partial\lambda}{\partial y} + w\frac{\partial\lambda}{\partial z} = p_1\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} + p_3\frac{\partial\lambda}{\partial u_3}.$$

Par suite

$$\int_S \lambda\theta dxdydz = \int_S \left(p_1\frac{\partial\lambda}{\partial u_1} + p_2\frac{\partial\lambda}{\partial u_2} + p_3\frac{\partial\lambda}{\partial u_3}\right)Ddu_1du_2du_3.$$

D'où

$$\int_S \lambda\theta dxdydz = \int_S \lambda\left(\frac{\partial(Dp_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(Dp_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(Dp_3)}{\partial u_3}\right)\frac{1}{D}dxdydz.$$

Puisque λ est indéterminée, on déduit

$$\theta = \frac{1}{D}\left[\frac{\partial(Dp_1)}{\partial u_1} + \frac{\partial(Dp_2)}{\partial u_2} + \frac{\partial(Dp_3)}{\partial u_3}\right].$$

5. Nous appellerons les équations (2) les équations conjuguées aux équations de LAMÉ. Il est connu que les équations de LAMÉ se rapportent à l'hypothèse de NEUMANN. C'est à dire pour trouver ces équations il faut supposer que les vibrations des particules du milieu élastique ont lieu dans le plan de polarisation. FRESNEL au contraire a supposé que la direction des vibrations soit normale au plan de polarisation. Il serait aisé de voir que les équations (2) sont les équations du mouvement dans l'hypothèse de FRESNEL. Il suffit pour cela de supposer que $\sqrt{H_{11}}M_1$, $\sqrt{H_{22}}M_2$, $\sqrt{H_{33}}M_3$ représentent les composantes des déplacements dans les directions t_1, t_2, t_3.

ART. 3. *Les coordonnées de Weber. Transformations des équations de Lamé en coordonnées de Weber.*

1. M. WEBER a démontré que si l'on a

$$(1) \qquad \begin{cases} x = b \operatorname{sn}(u_2, k) \operatorname{dn}(u_3, \mu), \\ y = a \operatorname{cn}(u_2, k) \operatorname{cn}(u_3, \mu), \\ z = a \operatorname{dn}(u_2, k) \operatorname{sn}(u_3, \mu), \end{cases}$$

où

$$k^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \qquad \mu^2 = \frac{a^2}{b^2}\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}$$

on obtient par l'élimination de u_2, u_3,

$$(2) \qquad \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2 - a^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2 - b^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2} = 1,$$

qui est l'équation de la surface des ondes.[1]

Au lieu de

$$\operatorname{sn}(u_2, k)\ ,\ \operatorname{cn}(u_2, k)\ ,\ \operatorname{dn}(u_2, k),$$
$$\operatorname{sn}(u_3, \mu)\ ,\ \operatorname{cn}(u_3, \mu)\ ,\ \operatorname{dn}(u_3, \mu)$$

nous écrirons, pour simplifier,

$$\operatorname{sn} u_2\ ,\ \operatorname{cn} u_2\ ,\ \operatorname{dn} u_2,$$
$$\operatorname{sn} u_3\ ,\ \operatorname{cn} u_3\ ,\ \operatorname{dn} u_3,$$

en supprimant les modules (k, μ) suffisamment rappelés par les indices des arguments u_2, u_3. Soit $4K$ la période réelle correspondant au module k; $4L$ la même période correspondant au module μ.

En donnant à u_2 toutes les valeurs réelles comprises entre $-K$ et K et à u_3 toutes les valeurs réelles comprises entre $-2L$ et $2L$, on obtient par les formules (1) tous les points de la nappe extérieure de la surface des ondes qu'on appellera σ'.

[1] Journal de Crelle. T. 84, page 353.

2. Examinons maintenant comment sont disposées les lignes

$$u_2 = \text{const.}, \qquad u_3 = \text{const.}$$

sur σ'.

Conduisons par l'origine les parallèles T_1, T_2 aux axes optiques. Elles découpent le plan xz en quatre parties qui contiennent respectivement les parties positives et négatives des axes x, z. Nous les désignerons par ω_x, ω_{-x}, ω_z, ω_{-z}.

En faisant $u_2 = -K$, on trouve

$$x = -b \,\mathrm{dn}\, u_3, \qquad y = 0, \qquad z = b\mu \,\mathrm{sn}\, u_3.$$

Cette ligne est la partie de l'intersection du plan xz avec σ' comprise dans ω_{-x}. De même on voit que la ligne $u_2 = K$ est la partie de la même intersection comprise dans ω_x. Les lignes

$$u_3 = -L, \qquad u_3 = L$$

sont les parties de l'intersection de σ' avec le plan xz comprises dans ω_{-z} et ω_z.

Ajoutons les équations (1) après en avoir élevé les deux membres à carré. On obtient

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 - (a^2 - b^2)\,\mathrm{sn}^2 u_2. \tag{3}$$

L'intersection de σ' avec la sphère (3) est formée de deux courbes situées des deux côtés du plan yz. Si la courbe qui est du côté des x positives correspond à $u_2 = a_2$, on aura

$$K > a_2 > 0.$$

L'autre courbe correspondra alors à

$$u_2 = -a_2.$$

De même on trouve

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = a^2[b^2 - (b^2 - c^2)\,\mathrm{sn}^2 u_3]. \tag{4}$$

Considérons les deux plans xz, xy. Ils partagent l'espace en quatre parties que nous désignerons par

$$(5) \qquad S_{y,z}\,,\ S_{-y,z}\,,\ S_{y,-z}\,,\ S_{-y,-z}$$

en mettant en évidence le signe des coordonnées y, z de leurs points.

L'intersection de l'ellipsoïde (4) avec σ' est formée de deux courbes qui sont situées des deux côtés du plan xy et dont chacune est coupée par le plan xz.

On pourra donc considérer les quatre parties L_{yz}, $L_{-y,z}$, $L_{y,-z}$, $L_{-y,-z}$ de cette intersection qui sont contenues dans les quatre parties (5) de l'espace.

Si $L_{y,z}$ correspond à $u_3 = a_3$, on aura

$$L \geqq a_3 \geqq 0$$

et

$$\begin{aligned} &L_{-y,z} \quad \text{correspondra à } u_3 = 2L - a_3,\\ &L_{y,-z} \quad \text{correspondra à } u_3 = -a_3,\\ &L_{-y,-z} \quad \text{correspondra à } u_3 = 2L + a_3. \end{aligned}$$

On tire de là que u_2 considérée comme fonction des points de la surface σ' est continue, tandis que u_3 est discontinue le long des lignes $u_2 = -K$, $u_2 = K$. La somme des valeurs de u_3 des deux côtés de ces lignes est toujours égale à $2L$. u_3 est aussi discontinue le long de la partie Λ de l'intersection du plan xy avec σ' qui est du côté des y négatives. La différence des valeurs de u_3 le long de la ligne Λ est constante et égale à $4L$.

Par conséquent les fonctions elliptiques

$$(6) \qquad \operatorname{sn} u_2\,,\ \operatorname{cn} u_2\,,\ \operatorname{dn} u_2\,,\ \operatorname{sn} u_3\,,\ \operatorname{dn} u_3$$

seront continues sur la surface σ', mais

$$\operatorname{cn} u_3$$

sera discontinue le long des lignes $u_2 = K$, $u_2 = -K$. Ses valeurs sur les deux côtés de ces lignes seront égales et de signe contraire.

3. **Posons maintenant**

$$(7) \quad \begin{cases} x = bu_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_3, \\ y = au_1 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{cn} u_3, \\ z = au_1 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{sn} u_3, \end{cases} \qquad (8) \quad \begin{cases} \infty > u_1 \geqq 0, \\ K \geqq u_2 \geqq -K, \\ 2L \geqq u_3 > -2L. \end{cases}$$

Les surfaces

$$u_1 = \text{const.}$$

seront les nappes extérieures d'un système de surfaces des ondes concentriques et homothétiques. Les surfaces

$$u_2 = \text{const.}, \qquad u_3 = \text{const.}$$

seront des cônes dont le sommet est à l'origine, et dont les directrices sont les lignes $u_2 = \text{const.}$, $u_3 = \text{const.}$, que nous avons déjà examinées sur la surface σ'. Les fonctions elliptiques (6), considérées comme fonctions des points de l'espace, seront continues, tandis que $\operatorname{cn} u_3$ sera discontinue le long des parties ω_x, ω_{-x} du plan xz.

4. A tout système de valeurs de x, y, z (excepté si $y = 0$) correspond un seul système de valeurs pour u_1, u_2, u_3 qui satisfont aux conditions (7), (8). On appellera ces valeurs les coordonnées de Weber du point x, y, z.

De même si on a deux points $A_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ et $A_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ nous poserons

$$x_2 - x_1 = x, \qquad y_2 - y_1 = y, \qquad z_2 - z_1 = z.$$

Le système des valeurs de u_1, u_2, u_3 qui vérifient les conditions (7), (8) seront les coordonnées de Weber du point A_2 par rapport au point A_1.

Il est aisé de voir que les coordonnées de Weber du point A_1 par rapport au point A_2, seront

$$u_1, \; -u_2, \; -2L + u_3$$

si $u_3 > 0$, et

$$u_1, \; -u_2, \; 2L + u_3,$$

si $u_3 \leqq 0$.

Calculons le carré de l'élément linéaire de l'espace en fonctions des coordonnées u_1, u_2, u_3.

On trouve par un calcul très simple

$$
(9)\quad \begin{cases}
H_{11} = a^2 \operatorname{cn}^2 u_2 + b^2 \operatorname{sn}^2 u_2, \\
H_{22} = u_1^2[(a^2 - b^2)\operatorname{sn}^2 u_2 \operatorname{dn}^2 u_2 + b^2 - b^2k^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - b^2\mu^2 \operatorname{sn}^2 u_3], \\
H_{33} = a^2u_1^2[1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_3 + (\mu^2 + k^2 - 1)\operatorname{sn}^2 u_2 \operatorname{sn}^2 u_3]. \\
H_{12} = u_1(b^2 - a^2)\operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2, \\
H_{23} = H_{31} = 0,
\end{cases}
$$

d'où

$$
D = \begin{vmatrix} H_{11}, & H_{12}, & H_{13} \\ H_{21}, & H_{22}, & H_{23} \\ H_{31}, & H_{32}, & H_{33} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}
$$

$$
= a^2bu_1^2[1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_3 + (\mu^2 + k^2 - 1)\operatorname{sn}^2 u_2 \operatorname{sn}^2 u_3].
$$

5. Pour établir les équations de Lamé en coordonnées de Weber, il suffit de calculer les quantités K_{ii}.

On obtient

$$
(10)\quad \begin{cases}
K_{11} = a^2[b^2 \operatorname{cn}^2 u_3 + c^2 \operatorname{sn}^2 u_3], \\
K_{22} = a^2b^2u_1^2[1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_3 + (\mu^2 + k^2 - 1)\operatorname{sn}^2 u_2 \operatorname{sn}^2 u_3], \\
K_{33} = a^2u_1^2[(b^2 - c^2)\operatorname{sn}^2 u_3 \operatorname{dn}^2 u_3 + c^2 - c^2k^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - c^2\mu^2 \operatorname{sn}^2 u_3], \\
K_{13} = a^2u_1(c^2 - b^2)\operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3, \\
K_{23} = K_{12} = 0.
\end{cases}
$$

En posant

$$
(11)\qquad \Delta = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u_2 - \mu^2 \operatorname{sn}^2 u_3 + (\mu^2 + k^2 - 1)\operatorname{sn}^2 u_2 \operatorname{sn}^2 u_3,
$$

on aura

$$
(12)\qquad H_{33} = a^2u_1^2\Delta, \qquad D = a^2bu_1^2\Delta, \qquad K_{22} = a^2b^2u_1^2\Delta.
$$

6. Si au lieu des équations (7) on pose les équations

$$(13) \qquad \begin{cases} x = c\bar{u}_1 \operatorname{sn}(\bar{u}_3, \bar{\mu}) \operatorname{dn}(\bar{u}_2, \bar{k}), \\ y = c\bar{u}_1 \operatorname{cn}(\bar{u}_3, \bar{\mu}) \operatorname{cn}(\bar{u}_2, \bar{k}), \\ z = b\bar{u}_1 \operatorname{dn}(\bar{u}_3, \bar{\mu}) \operatorname{sn}(\bar{u}_2, \bar{k}), \end{cases}$$

où

$$\bar{\mu}^2 = \frac{c^2}{b^2}\frac{b^2 - a^2}{c^2 - a^2}, \qquad \bar{k}^2 = \frac{c^2 - b^2}{c^2 - a^2},$$

on obtient tous les points de l'espace en donnant à $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ toutes les valeurs réelles, telles que

$$(14) \qquad \begin{cases} \infty > \bar{u}_1 \geqq 0, \\ \bar{K} \geqq \bar{u}_2 \geqq -\bar{K}, \\ 2\bar{L} \geqq \bar{u}_3 > -2\bar{L}, \end{cases}$$

$4\bar{K}$ et $4\bar{L}$ étant les périodes réelles correspondantes aux modules $\bar{k}, \bar{\mu}$. Les surfaces $\bar{u} =$ const. sont les nappes intérieures d'un système de surfaces des ondes concentriques et homothétiques, auxquelles appartient la surface (2). Les surfaces $\bar{u}_2 =$ const., $\bar{u}_3 =$ const. sont des cônes dont le sommet est à l'origine et dont les directrices sont des lignes sphériques et elliptiques de ces nappes.

Il est facile de vérifier que, si les conditions (13), (14), sont remplies,

$$\operatorname{sn}\bar{u}_2\,, \ \operatorname{cn}\bar{u}_2\,, \ \operatorname{dn}\bar{u}_2\,, \ \operatorname{sn}\bar{u}_3\,, \ \operatorname{dn}\bar{u}_3$$

sont des fonctions continues des points de l'espace, tandis que

$$\operatorname{cn}\bar{u}_3$$

est discontinue le long des parties ω_z, ω_{-z}, du plan xz, puisque cette quantité prend des valeurs égales et de signes contraires sur les deux côtés de ces surfaces.

A tout système de valeurs de x, y, z (excepté si $y = 0$) correspond un seul système de valeurs de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ qui vérifient les conditions (13), (14). Nous appellerons ces valeurs les coordonnées de WEBER de la 2^de^ espèce du point $A = (x, y, z)$. En posant

$$x = x_2 - x_1, \qquad y = y_2 - y_1, \qquad z = z_2 - z_1,$$

u_1, u_2, u_3 seront les coordonnées de WEBER de la 2^de^ espèce du point $A_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ par rapport au point $A_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$.

7. Pour transformer les équations de LAMÉ en coordonnées $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$, il suffit de calculer les quantités H_{is}, K_{is} par rapport à ces variables. Nous les désignerons par $\overline{H}_{is}, \overline{K}_{is}$. En posant

$$(15) \qquad \overline{\Delta} = 1 - \bar{k}^2 \operatorname{sn}^2 \bar{u}_2 - \bar{\mu}^2 \operatorname{sn}^2 \bar{u}_3 + (\bar{\mu}^2 + \bar{k}^2 - 1) \operatorname{sn}^2 \bar{u}_2 \operatorname{sn}^2 \bar{u}_3$$

on trouve

$$(16) \qquad \overline{H}_{22} = c^2 \bar{u}_1^2 \overline{\Delta}, \qquad \overline{D} = c^2 b \bar{u}_1^2 \overline{\Delta}, \qquad \overline{K}_{33} = c^2 b^2 \bar{u}_1^2 \overline{\Delta},$$

$$(17) \qquad \overline{H}_{23} = \overline{H}_{31} = \overline{K}_{23} = \overline{K}_{12} = 0.$$

ART. 4. *Les intégrales de Lamé.*

1. On peut trouver bien facilement deux intégrales des équations de LAMÉ, après les avoir transformées en coordonnées de WEBER.

Examinons d'abord ce qu'on trouve en prenant les coordonnées de WEBER de première espèce.

Les équations de LAMÉ seront vérifiées par les valeurs

$$p_1 = 0, \qquad p_2 = 0.$$

En effet en rappellant les équations (1) du 2^ème^ article et les équations (9) de l'article précédent, on trouve

$$q_1 = 0, \qquad q_2 = 0, \qquad q_3 = H_{33} p_3,$$

$$P_1 = -\frac{1}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}, \qquad P_2 = \frac{1}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_1} \qquad P_3 = 0,$$

$$Q_1 = -\frac{K_{11}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}, \qquad Q_2 = \frac{K_{22}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_1} = b\frac{\partial q_3}{\partial u_1}, \qquad Q_3 = -\frac{K_{13}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2},$$

$$D p_3 = b q_3.$$

Par suite les équations de LAMÉ se réduisent aux suivantes

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial u_2}\left[-\frac{K_{12}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right] - b\frac{\partial^2 q_3}{\partial u_1 \partial u_2},\\ 0 &= \frac{\partial}{\partial u_3}\left[-\frac{K_{11}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right] - \frac{\partial}{\partial u_1}\left[\frac{K_{12}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right],\\ b\frac{\partial^2 q_3}{\partial t^2} &= b\frac{\partial^2 q_3}{\partial u_1^2} - \frac{\partial}{\partial u_2}\left[-\frac{K_{11}}{D}\frac{\partial q_3}{\partial u_2}\right].\end{aligned}\right.$$

Supposons q_3 fonction de t et de u_1 seulement. Les deux premières équations (1) seront satisfaites; la troisième deviendra

$$\frac{\partial^2 q_3}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 q_3}{\partial u_1^2}$$

dont l'intégrale générale est

$$q_3 = f(t + u_1) + \varphi(t - u_1),$$

f, φ étant deux fonctions arbitraires. On a donc l'intégrale suivante des équations de LAMÉ

$$(2)\quad\left\{\begin{array}{lll} q_1 = 0, & q_2 = 0, & q_3 = f(t + u_1) + \varphi(t - u_1),\\ p_1 = 0, & p_2 = 0, & p_3 = \dfrac{1}{a^2 u_1^2 \Delta}[f(t + u_1) + \varphi(t - u_1)],\\ Q_1 = 0, & Q_2 = b[f'(t + u_1) - \varphi'(t - u_1)], & Q_3 = 0,\\ P_1 = 0, & P_2 = \dfrac{1}{a^2 b u_1^2 \Delta}[f'(t + u_1) - \varphi'(t - u_1)], & P_3 = 0\end{array}\right.$$

où Δ a la valeur (11), art. 3.

2. En rappelant les équations (15) du premier article on trouve

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned} u &= \frac{\partial u_3}{\partial x}[f(t + u_1) + \varphi(t - u_1)],\\ v &= \frac{\partial u_3}{\partial y}[f(t + u_1) + \varphi(t - u_1)],\\ w &= \frac{\partial u_3}{\partial z}[f(t + u_1) + \varphi(t - u_1)].\end{aligned}\right.$$

Des équations (7) du même article, on déduit aussi les expressions équivalentes

$$(4)\qquad\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta}[f(t+u_1)+\varphi(t-u_1)],\\ v &= -\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}[f(t+u_1)+\varphi(t-u_1)],\\ w &= \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta}[f(t+u_1)+\varphi(t-u_1)].\end{aligned}\right.$$

Enfin les équations (16) et (11) du premier article conduisent aux formules suivantes

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned} U &= \frac{b}{a^2}\frac{\partial u_2}{\partial x}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)]\\ &= \frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{dn} u_3}{a^2 u_1 \Delta}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)],\\ V &= \frac{1}{b}\frac{\partial u_2}{\partial y}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)]\\ &= -\frac{\operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3}{a b u_1 \Delta}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)],\\ W &= \frac{b}{c^2}\frac{\partial u_2}{\partial z}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)]\\ &= -\frac{k^2 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3}{a b u_1 \Delta}[f'(t+u_1)-\varphi'(t-u_1)].\end{aligned}\right.$$

3. Considérons maintenant les coordonnées de Weber de la seconde espèce. Le procédé par lequel on est parvenu aux intégrales (2) peut être appliqué à ces coordonnées. On trouve ainsi l'intégrale suivante

$$(6)\qquad\left\{\begin{array}{lll} \bar q_1 = 0, & \bar q_2 = 0, & \bar q_3 = \bar f(t+\bar u_1)+\bar\varphi(t-\bar u_1),\\ \bar p_1 = 0, & \bar p_2 = 0, & \bar p_3 = \dfrac{1}{c^2 \bar a_1^2 \Delta}[\bar f(t+\bar u_1)+\bar\varphi(t-\bar u_1)],\\ \bar Q_1 = 0, & \bar Q_2 = b[\bar f'(t+\bar u_1)-\bar\varphi'(t-\bar u_1)], & \bar Q_3 = 0,\\ \bar P_1 = 0, & \bar P_2 = \dfrac{1}{c^2 b \bar a_1^2 \Delta}[\bar f'(t+\bar u_1)-\bar\varphi'(t-\bar u_1)], & \bar P_3 = 0,\end{array}\right.$$

$\bar f$ et $\bar\varphi$ étant des fonctions arbitraires.

On en tire

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
\bar{u} &= \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial x}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)] \\
&= \frac{\operatorname{dn}\bar{a}_2\operatorname{cn}\bar{a}_3\operatorname{dn}\bar{a}_3}{c\bar{a}_1\bar{\Delta}}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)], \\
\bar{v} &= \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial y}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)] \\
&= -\frac{\operatorname{cn}\bar{a}_2\operatorname{sn}\bar{a}_2\operatorname{dn}\bar{a}_3}{c\bar{a}_1\bar{\Delta}}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)], \\
\bar{w} &= \frac{\partial \bar{a}_3}{\partial z}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\bar{\varphi}(t-\bar{u}_1)] \\
&= -\frac{\bar{\mu}^2 b\operatorname{sn}\bar{a}_2\operatorname{sn}\bar{a}_3\operatorname{cn}\bar{a}_3}{c^2\bar{a}_1\bar{\Delta}}[\bar{f}(t+\bar{u}_1)+\varphi(t-\bar{u}_1)],
\end{aligned}\right.
$$

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\bar{U} &= \frac{b}{a^2}\frac{\partial \bar{a}_2}{\partial x}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)] \\
&= -\frac{\bar{k}^2\operatorname{sn}\bar{a}_2\operatorname{cn}\bar{a}_2\operatorname{sn}\bar{a}_3}{cb\bar{a}_1\bar{\Delta}}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)], \\
\bar{V} &= \frac{1}{b}\frac{\partial \bar{a}_2}{\partial y}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)] \\
&= -\frac{\operatorname{sn}\bar{a}_2\operatorname{dn}\bar{a}_2\operatorname{cn}\bar{a}_3}{cb\bar{a}_1\Delta}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)], \\
\bar{W} &= \frac{b}{c^2}\frac{\partial \bar{a}_2}{\partial z}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u}_1)] \\
&= \frac{\operatorname{cn}\bar{a}_2\operatorname{dn}\bar{a}_2\operatorname{dn}\bar{a}_3}{c^2\bar{a}_1\bar{\Delta}}[\bar{f}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\varphi}'(t-\bar{u})].
\end{aligned}\right.
$$

4. Nous avons vu (art. 2) qu'à toute intégrale des équations de Lamé correspond une intégrale des équations conjuguées liée à la précédente par les équations (3) du 2ème article.

On aura donc, en partant des formules (2), (6), les deux intégrales suivantes des équations conjuguées à celles de Lamé:

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
&M_1 = 0, && M_2 = \frac{1}{a^2 b u_1^2 \Delta}[\psi(t+u_1)+\chi(t-u_1)], && M_3 = 0, \\
&N_1 = 0, && N_2 = b[\psi(t+u_1)+\chi(t-u_1)], && N_3 = 0, \\
&m_1 = 0, && m_2 = 0, && m_3 = \frac{1}{a^2 u_1^2 \Delta}[\psi'(t+u_1)-\chi'(t-u_1)], \\
&n_1 = 0, && n_2 = 0, && n_3 = \psi'(t+u_1)-\chi'(t-u_1),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(10)\begin{cases}
\overline{M}_1 = 0, & \overline{M}_2 = \dfrac{1}{c^2 b \bar{u}_1^2 \overline{\Delta}}[\bar{\psi}(t+\bar{u}_1)+\bar{\chi}(t-\bar{u}_1)], \qquad \overline{M}_3 = 0,\\
\overline{N}_1 = 0, & \overline{N}_2 = b[\bar{\psi}(t+\bar{u}_1)+\bar{\chi}(t-\bar{u}_1)], \qquad \overline{N}_3 = 0,\\
\bar{m}_1 = 0, & \bar{m}_2 = 0, \qquad \bar{m}_3 = \dfrac{1}{c^2 \bar{u}_1^2 \overline{\Delta}}[\bar{\psi}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\chi}'(t-\bar{u}_1)],\\
\bar{n}_1 = 0, & \bar{n}_2 = 0, \qquad \bar{n}_3 = \bar{\psi}'(t+\bar{u}_1)-\bar{\chi}'(t-\bar{u}_1).
\end{cases}
$$

$\psi, \chi, \bar{\psi}, \bar{\chi}$ étant des fonctions arbitraires.

De même on sait que des intégrales précédentes on pourrait déduire des intégrales des équations de Lamé. Mais il est aisé de voir qu'en partant des formules (9), (10) on ne trouverait pas de nouvelles intégrales, car on reviendrait aux formules (2), (6).

5. Nous remarquerons enfin que les intégrales des équations de Lamé que nous venons de trouver vérifient la condition (5) de l'article 2 et par suite correspondent à des vibrations transversales.

6. On peut maintenant se poser la question. Est-ce qu'on peut trouver d'autres intégrales des équations de Lamé de la forme

$$
(11)\begin{cases}
u = u_\alpha f(t+u_1) + u_\beta \varphi(t+\bar{u}_1),\\
v = v_\alpha f(t+u_1) + v_\beta \varphi(t+\bar{u}_1),\\
w = w_\alpha f(t+u_1) + w_\beta \varphi(t+\bar{u}_1)
\end{cases}
$$

où $u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha$; $u_\beta, v_\beta, w_\beta$ sont indépendantes de t et $f(\alpha)$ est une fonction arbitraire, tandis que $\varphi(\alpha)$ est une fonction arbitraire ou dépend d'une manière quelconque de $f(\alpha)$?

Si (11) est une intégrale des équations de Lamé, on doit trouver par la substitution dans les équations différentielles, trois équations de la forme

$$A_0 f + B_0\varphi + A_1 f' + B_1\varphi' + A_2 f'' + B_2\varphi'' = 0$$

où $A_0, B_0, A_1, B_1, A_2, B_2$ sont des quantités qui ne dépendent pas de t.

Il est aisé de se persuader que ces coefficients doivent être nuls. En effet si cela n'arrivait pas, on aurait

$$\begin{vmatrix} f & , \varphi & , f' & , \varphi' & , f'' & , \varphi'' \\ f' & , \varphi' & , f'' & , \varphi'' & , f''' & , \varphi''' \\ f'' & , \varphi'' & , f''' & , \varphi''' & , f^{\text{IV}} & , \varphi^{\text{IV}} \\ f''' & , \varphi''' & , f^{\text{IV}} & , \varphi^{\text{IV}} & , f^{\text{V}} & , \varphi^{\text{V}} \\ f^{\text{IV}} & , \varphi^{\text{IV}} & , f^{\text{V}} & , \varphi^{\text{V}} & , f^{\text{VI}} & , \varphi^{\text{VI}} \\ f^{\text{V}} & , \varphi^{\text{V}} & , f^{\text{VI}} & , \varphi^{\text{VI}} & , f^{\text{VII}} & , \varphi^{\text{VII}} \end{vmatrix} = 0.$$

Posons $t + u_1 = \alpha$, $t + \bar{u}_1 = \beta$, on aura $f = f(\alpha)$, $\varphi = \varphi(\beta)$ et l'on pourra regarder α et β comme des variables indépendantes. Mais f est une fonction arbitraire, par suite le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi & , \varphi' & , \varphi'' \\ \varphi' & , \varphi'' & , \varphi''' \\ \varphi'' & , \varphi''' & , \varphi^{\text{VI}} \end{vmatrix}$$

devrait être nul. Donc φ ne serait une fonction arbitraire ni dépendrait de f.

On tire de la que

$$(12) \quad \begin{cases} u_\alpha f(t + u_1), \\ v_\alpha f(t + u_1), \\ w_\alpha f(t + u_1) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (12') \quad \begin{cases} u_\beta \varphi(t + \bar{u}_1), \\ v_\beta \varphi(t + \bar{u}_1), \\ w_\beta \varphi(t + \bar{u}_1) \end{cases}$$

doivent former deux intégrales des équations de LAMÉ. En prenant les coordonnées de WEBER de la première espèce, à l'intégrale (12) doit correspondre l'intégrale suivante des équations transformées

$$\begin{cases} p_1 = p_{1\alpha} f(t + u_1), \\ p_2 = p_{2\alpha} f(t + u_1), \\ p_3 = p_{3\alpha} f(t + u_1), \end{cases}$$

où $p_{1\alpha}, p_{2\alpha}, p_{3\alpha}$ sont des quantités qui ne dépendent pas de t. En remarquant que

$$H_{13} = H_{23} = K_{12} = K_{23} = 0$$

on trouve

$$\begin{cases} q_1 = (H_{11}p_{1a} + H_{12}p_{2a})f = q_{1a}f, \\ q_2 = (H_{21}p_{1a} + H_{22}p_{2a})f = q_{2a}f, \\ q_3 = H_{33}p_{3a}f \qquad\qquad = q_{3a}f, \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{2a}}{\partial u_3} - \frac{\partial q_{3a}}{\partial u_2}\right)f \qquad\qquad = P_{1a}f, \\ P_2 = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{3a}}{\partial u_1} - \frac{\partial q_{1a}}{\partial u_3}\right)f + \frac{q_{3a}}{D}f' = P_{2a}f + \frac{q_{3a}}{D}f', \\ P_3 = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial q_{1a}}{\partial u_2} - \frac{\partial q_{2a}}{\partial u_1}\right)f - \frac{q_{2a}}{D}f' = P_{3a}f - \frac{q_{2a}}{D}f', \end{cases}$$

$$\begin{cases} Q_1 = (K_{11}P_{1a} + K_{13}P_{3a})f - \frac{1}{D}K_{13}q_{2a}f' = Q_{1a}f - \frac{K_{13}}{D}q_{2a}f', \\ Q_2 = K_{22}P_{2a}f + \frac{1}{D}K_{22}q_{3a}f' \qquad\qquad = Q_{2a}f + \frac{K_{22}}{D}q_{3a}f', \\ Q_3 = (K_{31}P_{1a} + K_{33}P_{3a})f - \frac{1}{D}K_{33}q_{2a}f' = Q_{3a}f - \frac{K_{33}}{D}q_{2a}f', \end{cases}$$

$$Dp_{1a}f'' + \left(\frac{\partial Q_{2a}}{\partial u_3} - \frac{\partial Q_{3a}}{\partial u_2}\right)f + \left[\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{K_{33}}{D}q_{2a}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{K_{22}}{D}q_{3a}\right)\right]f' = 0,$$

$$\left(Dp_{2a} - \frac{K_{33}}{D}q_{2a}\right)f'' + \left(\frac{\partial Q_{3a}}{\partial u_1} - \frac{\partial Q_{1a}}{\partial u_3}\right)f + \left[\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{K_{13}q_{2a}}{D}\right) - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{K_{33}q_{2a}}{D}\right)\right]f' = 0,$$

$$\left(Dp_{3a} - \frac{K_{22}}{D}q_{3a}\right)f'' + \left(\frac{\partial Q_{1a}}{\partial u_2} - \frac{\partial Q_{2a}}{\partial u_1}\right)f - \left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{K_{22}q_{3a}}{D}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{K_{13}q_{2a}}{D}\right)\right]f' = 0.$$

Puisque f est une fonction arbitraire, il faudra égaler à zéro les coefficients de f'', f', f.

Par suite on aura

$$q_{1a} = 0, \qquad q_{2a} = 0, \qquad q_{3a} = \text{const.}$$

On revient donc aux intégrales qu'on a déjà trouvées.

De même on aurait un résultat tout à fait semblable, en partant des intégrales (12').

Il n'y a donc que les intégrales que nous avons trouvées dans les paragraphes précédents de cet article qui aient la forme (11).

ART. 5. *Propriétés des intégrales de Lamé.*

1. En se rappelant la discussion que nous avons faite dans l'article 3, il est aisé de voir que la deuxième des fonctions (4) (voir l'art. précédent) est une fonction continue des points de l'espace, tandis que la première et la troisième de ces fonctions sont discontinues le long des surfaces ω_x et ω_{-x}.

Substituons dans les seconds membres des équations (4) aux quantités u_1, u_2, u_3 leurs expressions en fonction de x, y, z et regardons t comme une quantité constante. On trouvera

$$u = \varphi_1(x, y, z), \qquad v = \varphi_2(x, y, z), \qquad w = \varphi_3(x, y, z).$$

D'après ce que nous venons de dire, φ_2 sera une fonction monodrome, mais φ_1 et φ_3 seront polydromes. Si l'on part d'un point quelconque et qu'on prenne les valeurs de φ_1 et φ_3 qui se suivent avec continuité en parcourant une ligne qui entoure un axe optique, on revient au point de départ avec les valeurs initiales changées de signe.

Cette propriété est commune aussi, aux fonctions $V, \bar{u}, \bar{w}, \bar{V}$ de l'article précédent, considérées comme fonctions de x, y, z.

Au contraire, $U, W, v, \bar{U}, \bar{W}$ sont des fonctions monodromes.

Puisque $u_1 = 0$ à l'origine, les douze fonctions $u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ $U, V, W, \bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$, deviendront infinies pour $x = y = z = 0$.

Les mêmes fonctions deviennent indéterminées dans les points des parallèles aux axes optiques $T_1 T_2$ conduites par l'origine.

Posons

$$x = x_2 - x_1, \qquad y = y_2 - y_1, \qquad z = z_2 - z_1.$$

On aura

$$\varphi_1(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = -\varphi_1(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

$$\varphi_2(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = -\varphi_2(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2),$$

$$\varphi_3(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = -\varphi_3(x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2).$$

Même $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ changent de signe par la permutation de x_1, y_1, z_1 avec x_2, y_2, z_2. Au contraire $U, V, W; \bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$, ne changent pas en effectuant cette permutation.

2. Lamé avait trouvé par un procédé tout à fait différent les intégrales (4) et (6) dans lesquelles on suppose

$$f(\alpha) = 0, \qquad \bar{f}(\alpha) = 0, \qquad \varphi(\alpha) = \cos\frac{2\pi\alpha}{T}, \qquad \bar{\varphi}(\alpha) = \frac{\cos 2\pi\alpha}{T}.$$

Ne s'étant pas aperçu de la polydromie de ces intégrales, il croyait qu'elles pouvaient représenter les vibrations lumineuses produites par un centre d'ébranlement situé à l'origine.

D'après la discussion que nous venons de faire il est évident que cela n'est pas vrai. Des vibrations lumineuses correspondant aux formules (4) et (6) ne pourraient être produites que par une couche de centres d'ébranlements situés sur les surfaces ω_x et ω_{-x} ou ω_t et ω_{-t}, ou sur toute autre surface qui coupe l'espace de sorte qu'on doive nécessairement la rencontrer lorsqu'on tourne autour des droites T_1, T_2.

3. Mais envisageons pour un instant la question au point de vue de Lamé, en supposant que ses conclusions soient vraies. On peut alors, en partant de ses intégrales, procéder de la même façon qu'a suivie M. Poincaré pour trouver l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V^2 \Delta^2 u.$$ [1]

Rappelons que M. Poincaré part de l'intégrale $\frac{F(r - Vt)}{r}$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, et qu'il cherche à quoi le conduit l'application du principe de Huyghens.

Supposons qu'à l'origine des temps toutes les molécules du milieu soient ébranlées. Soit σ_t la surface des ondes dont le centre est le point x_0, y_0, z_0 et les paramètres sont at, bt, ct. Dans l'intervalle de temps qui découle entre l'instant t et l'instant $t + dt$, le point x_0, y_0, z_0 aura reçu, selon le principe de Huyghens, les ébranlements provenant de tous

[1] *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière*, page 87.

les points compris entre les surfaces σ_t et σ_{t+dt}. En suivant donc les idées de LAMÉ sur le centre d'ébranlement, on pourrait représenter par

$$d\xi = \int\limits_S -\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z) dS$$
$$+ \int\limits_{\bar S} \frac{\operatorname{dn} \bar u_2 \operatorname{cn} \bar u_3 \operatorname{dn} \bar u_3}{c \bar u_1 \bar\Delta} \bar F(x_0 + \bar x, y_0 + \bar y, z_0 + \bar z) d\bar S,$$

$$d\eta = \int\limits_S -\frac{\operatorname{cn} v_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z) dS$$
$$+ \int\limits_{\bar S} -\frac{\operatorname{cn} \bar u_2 \operatorname{sn} \bar u_3 \operatorname{dn} \bar u_3}{c \bar u_1 \bar\Delta} \bar F(x_0 + \bar x, y_0 + \bar y, z_0 + \bar z) d\bar S,$$

$$d\zeta = \int\limits_S \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z) dS$$
$$+ \int\limits_{\bar S} -\frac{\bar\mu^2 b \operatorname{sn} \bar u_2 \operatorname{sn} \bar u_3 \operatorname{cn} \bar u_3}{c^2 \bar u_1 \bar\Delta} \bar F(x_0 + \bar x, y_0 + \bar y, z_0 + \bar z) d\bar S$$

les variations des composantes du déplacement du point x_0, y_0, z_0, qui ont lieu dans l'intervalle de temps dt. Il suffit pour cela de supposer

1°) que S soit la partie de l'espace comprise entre les nappes extérieures des deux surfaces des ondes σ_t et σ_{t+dt}, et $\bar S$ la partie comprise entre les nappes intérieures des mêmes surfaces,

2°) que $x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z$ soient les coordonnées des points de S et $x_0 + \bar x, y_0 + \bar y, z_0 + \bar z$ celles des points de $\bar S$,

3°) que u_1, u_2, u_3 soient les coordonnées de la 1ère espèce de WEBER du point x_0, y_0, z_0 par rapport au point $x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z$; et que $\bar u_1, \bar u_2, \bar u_3$ soient les coordonnées de WEBER de la 2de espèce du point x_0, y_0, z_0 par rapport au point $x_0 + \bar x, y_0 + \bar y, z_0 + \bar z$,

4°) enfin que les fonctions $F(x, y, z)$, $\bar F(\bar x, \bar y, \bar z)$ ne dépendent que de l'état initial du milieu.

Mais

$$dS = D du_1 du_2 du_3 = a^2 b u_1^2 \Delta du_1 du_2 du_3,$$

$$d\bar{S} = \bar{D} d\bar{u}_1 d\bar{u}_2 d\bar{u}_3 = c^2 b \bar{u}_1^2 \bar{\Delta} d\bar{u}_1 d\bar{u}_2 d\bar{u}_3,$$

$$u_1 = \bar{u}_1 = t,$$

$$du_1 = d\bar{u}_1 = dt,$$

donc

$$\frac{1}{b}\frac{d\xi}{dt} = \rho_1 = t\int_{\sigma'} -\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3 F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z) du_2 du_3$$
$$+ t\int_{\bar{\sigma}'} c \operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{F}(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z}) du_2 du_3,$$

$$\frac{1}{b}\frac{d\eta}{dt} = \rho_2 = t\int_{\sigma'} - a \operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3 F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z) du_2 du_3$$
$$+ t\int_{\bar{\sigma}'} - c \operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{F}(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z}) du_2 du_3,$$

$$\frac{1}{b}\frac{d\zeta}{dt} = \rho_3 = t\int_{\sigma'} a \operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3 F(x_0 + x, y_0 + y, z_0 + z) du_2 du_3$$
$$+ t\int_{\bar{\sigma}'} -\bar{\mu}^2 b \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \bar{F}(x_0 + \bar{x}, y_0 + \bar{y}, z_0 + \bar{z}) du_2 du_3.$$

Puisque les équations de LAMÉ sont linéaires, les formules précédentes devraient donner des intégrales de ces équations.

On obtient ainsi les mêmes formules de M^me KOWALEVSKI.[1] Mais il est aisé de se persuader que les fonctions qu'on vient de trouver ne sont pas des intégrales des équations de LAMÉ.

En effet on voit qu'en faisant $t = 0$, les fonctions ρ_1, ρ_2, ρ_3, $\frac{d\rho_1}{dt}, \frac{d\rho_2}{dt}, \frac{d\rho_3}{dt}$, s'annulent. Mais si on a un système d'intégrales des équations de LAMÉ qui s'annulent avec leurs dérivées par rapport à t, pour $t = 0$, elles seraient toujours nulles, ce qui n'a pas lieu pour ρ_1, ρ_2, ρ_3.

Ce résultat n'a rien de contradictoire et s'explique parfaitement, en se rappelant qu'on a trouvé les formules précédentes en supposant justes les idées de LAMÉ, tandis qu'on a prouvé le contraire.

[1] Acta mathematica, tome 6.

ART. 6. *Généralisation du théorème de Green. Application de la méthode de Kirchhoff.*

1. Désignons par

$$(1) \qquad p_s\,,\ Q_s\,,\ P_s\,,\ q_s\,;\ p'_s\,,\ Q'_s\,,\ P'_s\,,\ q'_s$$

deux systèmes d'intégrales des équations de LAMÉ. (Voir article 2, formule (1).)

On aura

$$\sum_r \sum_s DH_{rs}\left(\frac{\partial^2 p_r}{\partial t^2} p'_s - \frac{\partial^2 p'_r}{\partial t^2} p_s\right) = D\sum_r \left(q'_r \frac{\partial^2 p_r}{\partial t^2} - q_r \frac{\partial^2 p'_r}{\partial t^2}\right)$$

$$= \sum_r \left[q'_r\left(\frac{\partial Q_{r+2}}{\partial u_{r+1}} - \frac{\partial Q_{r+1}}{\partial u_{r+2}}\right) - q_r\left(\frac{\partial Q'_{r+2}}{\partial u_{r+1}} - \frac{\partial Q'_{r+1}}{\partial u_{r+2}}\right)\right].$$

Multiplions cette équation par $du_1 du_2 du_3$ et intégrons à un espace S limité par un contour σ. Supposons que les fonctions (1), soient finies, continues et monodromes dans l'espace S.

Si u, v est un système de coordonnées de la surface σ, on obtient

$$(2) \qquad \int_S \sum_r \sum_s H_{rs}\left(\frac{\partial^2 p_r}{\partial t^2} p'_s - \frac{\partial^2 p'_r}{\partial t^2} p_s\right) dS$$

$$= \int_\sigma \sum_r \left[q'_r \left| Q_{r+2} \frac{d(u_{r+2}\,, u_r)}{d(u\,, v)} - Q_{r+1} \frac{d(u_r\,, u_{r+1})}{d(u\,, v)} \right| \right.$$

$$\left. - q_r \left| Q'_{r+2} \frac{d(u_{r+2}\,, u_r)}{d(u\,, v)} - Q'_{r+1} \frac{d(u_r\,, u_{r+1})}{d(u\,, v)} \right| \right] du dv$$

$$- \int_S \sum_r \left[Q_r \left(\frac{\partial q'_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q'_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right) - Q'_r \left(\frac{\partial q_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right) \right] du_1 du_2 du_3.$$

La dernière intégrale est nulle. En effet on a

$$\int_S \sum_r \left[Q_r \left(\frac{\partial q'_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q'_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right) - Q'_r \left(\frac{\partial q_{r+1}}{\partial u_{r+2}} - \frac{\partial q_{r+2}}{\partial u_{r+1}}\right) \right] du_1 du_2 du_3$$

$$= \int_S \sum_r [Q_r P'_r - Q'_r P_r] dS = \int_S \sum_r \sum_s (K_{rs} P_s P'_r - K_{rs} P'_s P_r) dS = 0.$$

Par suite l'équation (2) peut être remplacée par l'autre

$$(3)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \sum_r \sum_s H_{rs}\left(\frac{\partial p_r}{\partial t} p'_s - \frac{\partial p'_s}{\partial t} p_r\right) dS$$

$$= \int\limits_\sigma \sum_r \left[q'_r \left\{ Q_{r+2}\frac{d(u_{r+2}, u_r)}{d(u, v)} - Q_{r+1}\frac{d(u_r, u_{r+1})}{d(u, v)} \right\} + Q'_r \left\{ q_{r+2}\frac{d(u_{r+2}, u_r)}{d(u, v)} - q_{r+1}\frac{d(u_r, u_{r+1})}{d(u, v)} \right\} \right] du dv.$$

2. Pareillement supposons que

$$(4)\qquad M_s,\ m_s,\ N_s,\ n_s;\ M'_s,\ m'_s,\ N'_s,\ n'_s$$

soient deux intégrales des équations conjuguées à celles de Lamé (voir article 2, formule (2)). Si les fonctions (4) sont finies continues et monodromes dans l'espace S on a

$$(5)\qquad \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \sum_r \sum_s K_{rs}\left(\frac{\partial M_r}{\partial t} M'_s - \frac{\partial M'_s}{dt} M_r\right) dS$$

$$= \int\limits_\sigma \sum_r \left[N'_r \left\{ n_{r+2}\frac{d(u_{r+2}, u_r)}{d(u, v)} - n_{r+1}\frac{d(u_r, u_{r+1})}{d(u, v)} \right\} + n'_r \left\{ N_{r+2}\frac{d(u_{r+2}, u_r)}{d(u, v)} - N_{r+1}\frac{d(u_r, u_{r+1})}{d(u, v)} \right\} \right] du dv.$$

Les formules (3) et (5) peuvent être considérées comme une généralisation du théorème de Green.

3. Prenons maintenant pour lignes coordonnées les coordonnées de Weber de la première espèce et posons

$$p'_s,\ Q'_s,\ P'_s,\ q'_s$$

la première des intégrales de Lamé que nous avons trouvée dans l'article 4 (voir formule (2)).

Afin que ces fonctions soient finies et continues dans l'espace S, il faut exclure l'origine et les surfaces ω_x, ω_{-x}.

Soit σ une surface qui renferme l'origine. Conduisons deux cônes

$$u_2 = K - \varepsilon, \qquad u_2 = -K + \varepsilon \qquad\qquad (\varepsilon > 0)$$

qu'on appellera α_1, α_2 et la nappe extérieure ω de la surface des ondes $u_1 = \varepsilon'$.

Quelque petites que soient les quantités $\varepsilon, \varepsilon'$, les fonctions p'_s, P'_s, Q'_s, q'_s, rempliront toujours les conditions suffisantes pour l'application de la formule (3) dans l'espace S_1 renfermé entre $\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \omega$. La surface σ_1 qui limite S_1 sera formée de quatre parties, qui appartiennent respectivement à $\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \omega$ et qu'on désignera par $\sigma', \alpha'_1, \alpha'_2, \omega'$. La formule (3) peut être appliquée en remplaçant S par S_1 et σ par σ_1. Les lignes u, v seront les coordonnées curvilignes de la surface σ_1. Considérons sur la ligne $u =$ const., la direction dans laquelle v croît. On l'appellera la direction positive de la ligne $u =$ const. De même considérons la direction dans laquelle u croît comme direction positive de la ligne $v =$ const. Alors en regardant la surface du côté extérieur à l'espace S_1 on devra faire tourner la direction positive de la ligne $v =$ const. d'un angle $< \pi$, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour la faire coincider avec la direction positive de la ligne $u =$ const. D'après cela on peut choisir pour coordonnées curvilignes $v =$ const., $u =$ const., sur le cône α_1 les lignes $u_1 =$ const., $u_3 =$ const. de cette surface, et sur le cône α_2 les lignes $u_3 =$ const., $u_1 =$ const. De même sur la surface ω on choisira les lignes $u_2 =$ const., $u_3 =$ const. pour les lignes coordonnées v, u. Donc, en posant pour simplicité d'écriture

$$f(t + u_1) + \varphi(t - u_1) = F,$$
$$f'(t + u_1) - \varphi'(t - u_1) = F_1,$$

on aura

$$(6) \qquad \frac{\partial}{\partial t} b \int_{S'} H_{33}\left[F \frac{\partial p_3}{\partial t} - F_1 p_3\right] dS$$

$$= \int_{\sigma'} \left[F \left| Q_2 \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} - Q_1 \frac{d(u_3, u_1)}{d(u, v)} \right| + bF_1 \left| q_1 \frac{d(u_1, u_2)}{d(u, v)} - q_3 \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} \right| \right] du dv$$

$$- \int_{\alpha'_1} F Q_1 du_1 du_3 + \int_{\alpha'_2} F Q_1 du_1 du_3 - \int_{\omega'} (F Q_2 - b F_1 q_3) du_2 du_3.$$

Q_1 est une fonction de u_1, u_2, u_3, t. Pour mettre cela en évidence nous écrirons $Q_1(u_1, u_2, u_3 \mid t)$. Par suite

$$\int_{\alpha_1'} FQ_1 du_1 du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{\varepsilon'}^{u_1} FQ_1(u_1, K - \varepsilon, u_3 \mid t) du_1$$

où la limite supérieure u_1 de la première intégrale est la coordonnée u_1 du point où la génératrice $u_3 =$ const. du cône α_1 rencontre la surface σ.

De même

$$\int_{\alpha_2'} FQ_1 du_1 du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{\varepsilon'}^{u_1} FQ_1(u_1, -K + \varepsilon, u_3 \mid t) du_1.$$

On aura aussi

$$\int_{\omega'} (FQ_2 - bF_1 q_3) du_2 du_3$$
$$= \int_{-K+\varepsilon}^{K-\varepsilon} du_2 \int_{-2L}^{2L} \{FQ_2(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t) - bF_1 q_3(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t)\} du_3.$$

Faisons tendre ε' vers zéro. En prenant garde que

$$\lim_{\varepsilon'=0} Q_2(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t) = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon'=0} q_3(\varepsilon', u_2, u_3 \mid t) = 0$$

on obtient

$$\lim_{\varepsilon'=0} \int_{\omega'} (FQ_2 - bF_1 q_3) du_2 du_3 = 0.$$

Supposons que même ε tende vers zéro.

Alors le cône α_1' tend vers une double couche qui couvre la partie α_x de ω_x comprise entre l'origine et la surface σ. Pareillement le cône α_1' tend vers une double couche qui couvre la partie α_{-x} de ω_{-x} comprise entre l'origine et la surface σ. On trouvera

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{\alpha_1'} FQ_1 du_1 du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t) du_1,$$

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \varepsilon'=0}} \int_{\alpha_2'} FQ_1 du_1 du_3 = \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, -K, u_3 \mid t) du_1.$$

Mais par la continuité de Q_1 le long des surfaces ω_x, ω_{-x}, on aura

$$\text{si } u_3 > 0 \quad \begin{cases} Q_1(u_1, K, u_3 \mid t) = Q_1(u_1, K, 2L - u_3 \mid t), \\ Q_1(u_1, -K, u_3 \mid t) = Q_1(u_1, -K, 2L - u_3 \mid t), \end{cases}$$

$$\text{si } u_3 < 0 \quad \begin{cases} Q_1(u_1, K, u_3 \mid t) = Q_1(u_1, K, -2L - u_3 \mid t), \\ Q_1(u_1, -K, u_3 \mid t) = Q_1(u_1, -K, -2L - u_3 \mid t). \end{cases}$$

Par conséquent

$$\int_{-2L}^{-L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1 = \int_{-L}^{0} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1,$$

$$\int_{L}^{2L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1 = \int_{0}^{L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1$$

d'où

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varepsilon'=0}} \int_{a_1'} FQ_1\, du_1\, du_3 = 2\int_{-L}^{L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, K, u_3 \mid t)\, du_1 = 2\int_{a_x} FQ_1\, du_1\, du_3.$$

De même

$$\lim_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varepsilon'=0}} \int_{a_2'} FQ_1\, du_1\, du_3 = 2\int_{-L}^{L} du_3 \int_0^{u_1} FQ_1(u_1, -K, u_3 \mid t)\, du_1 = 2\int_{a_{-x}} FQ_1\, du_1\, du_3.$$

La formule (6) devient

$$\frac{\partial}{\partial t}\, b \int_S H_{33}\left[F \frac{\partial p_3}{\partial t} - F_1 p_3\right] dS \tag{7}$$

$$= \int_\sigma \left[F \left\{ Q_2 \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} - Q_1 \frac{d(u_3, u_1)}{d(u, v)} \right\} + bF_1 \left\{ q_1 \frac{d(u_1, u_2)}{d(u, v)} - q_3 \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} \right\} \right] du\, dv$$

$$- 2\int_{a_x} FQ_1\, du_1\, du_3 + 2\int_{a_{-x}} FQ_1\, du_1\, du_3.$$

4. Prenons [1]

$$\varphi(\alpha) = 0,$$

$$f(\alpha) = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} e^{-\mu^2\alpha^2}$$

et intégrons la formule précédente par rapport à t entre le temps négatif, t_1 et le temps positif t_2.

On trouve, par une intégration par parties,

$$\left[b \int_S H_{33} \left\{ f(t+u_1) \frac{\partial p_3}{\partial t} - f'(t+u_1) p_3 \right\} dS \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_\sigma \left[f(t+u_1) \left\{ Q_2 \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} - Q_1 \frac{d(u_3, u_1)}{d(u, v)} \right\} \right.$$

$$\left. - bf(t+u_1) \left\{ \frac{\partial q_1}{\partial t} \frac{d(u_1, u_2)}{d(u, v)} - \frac{\partial q_3}{\partial t} \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} \right\} \right] dudv$$

$$+ \left[\int_\sigma bf(t+u_1) \left\{ q_1 \frac{d(u_1, u_2)}{d(u, v)} - q_3 \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} \right\} dudv \right]_{t_1}^{t_2}$$

$$- 2\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{a_\varepsilon} f(t+u_1) Q_1 du_1 du_3 + 2\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{a_{-\varepsilon}} f(t+u_1) Q_1 du_1 du_3.$$

Si nous faisons croître μ indéfiniment, la formule précédente à la limite devient

$$\text{(8)} \qquad \int_{a_\varepsilon} Q_1(u_1, K, u_3 \mid -u_1) du_1 du_3 - \int_{a_{-\varepsilon}} Q_1(u_1, -K, u_3 \mid -u_1) du_1 du_3$$

$$= \frac{1}{2} \int_\sigma \left\{ Q_2(u_1, u_2, u_3 \mid -u_1) \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} - Q_1(u_1, u_2, u_3 \mid -u_1) \frac{d(u_3, u_1)}{d(u, v)} \right.$$

$$\left. + b\chi_3(u_1, u_2, u_3 \mid -u_1) \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} - b\chi_1(u_1, u_2, u_3 \mid -u_1) \frac{d(u_1, u_2)}{d(u, v)} \right\} dudv$$

---

[1] Voir KIRCHHOFF, *Zur Theorie der Lichtstrahlen.* Wied. Ann. Bd. 18.
KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Math. Optik,* page 24.
Nous avons employé ici le même procédé suivi par KIRCHHOFF pour trouver sa for-

où

$$\chi_1 = \frac{\partial q_1}{\partial t}, \qquad \chi_3 = \frac{\partial q_3}{\partial t}.$$

5. Par le même procédé, en partant de la formule (5) et en se servant des coordonnées de WEBER de la première espèce et des intégrales (9) de l'article 4, on trouve

$$(9) \qquad \int_{a_s} \nu_1(u_1, K, u_3 \mid -u_1) du_1 du_3 - \int_{a_{-s}} \nu_1(u_1, -K, u_3 \mid -u_1) du_1 du_3$$

$$= \frac{1}{2} \int_\sigma \left\{ bn_1(u_1, u_2, u_3 \mid -u_1) \frac{d(u_1, u_2)}{d(u, v)} - bn_3(u_1, u_2, u_3 \mid -u_1) \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} \right.$$

$$\left. + \nu_1(u_1, u_2, u_3 \mid -u_1) \frac{d(u_3, u_1)}{d(u, v)} - \nu_2(u_1, u_2, u_3 \mid -u_1) \frac{d(u_2, u_3)}{d(u, v)} \right\} du dv$$

où

$$\nu_1 = \frac{\partial N_1}{\partial t}, \qquad \nu_2 = \frac{\partial N_2}{\partial t}.$$

On peut trouver des formules tout a fait semblables, en faisant usage des coordonnées de WEBER de la seconde espèce et des intégrales (6), (10) que nous avons trouvées dans l'article 4.

6. Supposons que la surface σ soit la nappe extérieure de la surface des ondes dont l'équation est

$$u_1 = t.$$

La formule (8) dans ce cas, deviendra

$$(10) \qquad \int_{-L}^{L} du_3 \int_0^t Q_1(u_1, K, u_3 \mid -u_1) du_1 - \int_{-L}^{L} du_3 \int_0^t Q_1(u_1, -K, u_3 \mid -u_1) du_1$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2L}^{2L} du_3 \int_{-K}^{K} \{ Q_2(t, u_2, u_3 \mid -t) + b\chi_3(t, u_2, u_3 \mid -t) \} du_2.$$

7. Les formules (8), (9) ont une analogie avec celle que KIRCHHOFF a donnée comme une généralisation du principe de HUYGHENS.

---

mule, mais on pourrait aussi atteindre le but par une autre méthode semblable à celle découverte par M. BELTRAMI (voir Rendiconti del R. Istituto Lombardo, S. 2, Vol. 22, Fasc. 10) pour démontrer la formule de KIRCHHOFF.

ART. 7. *Nouvelles intégrales des équations de Lamé.*

1. En prenant dans les équations (4) de l'article 4

$$\varphi = 0$$

et en désignant par $\psi_1(x, y, z)$, $\psi_2(x, y, z)$, $\psi_3(x, y, z)$ les coefficients de la fonction arbitraire, on pourra écrire ces formules de la manière suivante

$$-\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} f(t + u_1) = \psi_1 f(t + u_1),$$

$$-\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t + u_1) \quad = \psi_2 f(t + u_1),$$

$$\frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t + u_1) \quad = \psi_3 f(t + u_1).$$

Substituons $x - \xi$, $z - \zeta$ à la place de x, z; on obtiendra

$$(1) \qquad \begin{cases} \psi_1(x - \xi, y, z - \zeta) f(t + u_1), \\ \psi_2(x - \xi, y, z - \zeta) f(t + u_1), \\ \psi_3(x - \xi, y, z - \zeta) f(t + u_1). \end{cases}$$

Désignons par S_{+y}, S_{-y} les deux parties de l'espace dans lesquelles $y > 0$, $y < 0$. Il est aisé de voir que les fonctions (1) sont finies continues et monodromes dans S_{+y} et dans S_{-y}. Elles deviennent infinies dans le point $\xi, 0, \zeta$ et la première et la troisième sont discontinues sur le plan xz.

2. Supposons que f dépende des deux variables ξ, ζ; c'est à dire qu'elle soit une fonction arbitraire de $t + u_1, \xi, \zeta$. En multipliant par $d\xi d\zeta$, et en intégrant, on obtiendra les trois fonctions

$$u' = \int \psi_1(x - \xi, y, z - \zeta) f(u_1 + t, \xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

$$v' = \int \psi_2(x - \xi, y, z - \zeta) f(u_1 + t, \xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

$$w' = \int \psi_3(x - \xi, y, z - \zeta) f(u_1 + t, \xi, \zeta) d\xi d\zeta.$$

Elles constituent un système d'intégrales des équations de LAMÉ. Elles n'ont pas de discontinuités dans les deux parties de l'espace $S_{+\nu}$ et $S_{-\nu}$, mais sont discontinues sur le plan xz.

En partant des intégrales (7) de l'article 4 on trouve évidemment une intégrale parfaitement analogue à celle que nous venons d'obtenir et que l'on peut écrire

$$\bar{u}' = \int \bar{\psi}_1(x - \xi, y, z - \zeta)\bar{f}(\bar{u}_1 + t, \xi, \zeta)d\xi d\zeta,$$

$$\bar{v}' = \int \bar{\psi}_2(x - \xi, y, z - \zeta)\bar{f}(\bar{u}_1 + t, \xi, \zeta)d\xi d\zeta,$$

$$\bar{w}' = \int \bar{\psi}_3(x - \xi, y, z - \zeta)\bar{f}(\bar{u}_1 + t, \xi, \zeta)d\xi d\zeta.$$

On peut donc conclure: u_1, u_2, u_2, étant les coordonnées de WEBER de la première espèce du point x, y, z par rapport au point $\xi, 0, \zeta$, et $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ les coordonnées de WEBER de la seconde espèce du premier point par rapport au second, on aura les intégrales suivantes des équations de LAMÉ

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} u &= \int -\frac{\mu^2 b \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{cn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} f(t + u_1, \xi, \zeta)d\xi d\zeta \\ &\qquad + \int \frac{\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c\bar{u}_1 \overline{\Delta}} \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)d\xi d\zeta, \\ v &= \int -\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t + u_1, \xi, \zeta)d\xi d\zeta \\ &\qquad + \int -\frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c\bar{u}_1 \overline{\Delta}} \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)d\xi d\zeta, \\ w &= \int \frac{\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} f(t + u_1, \xi, \zeta)d\xi d\zeta \\ &\qquad + \int -\frac{\bar{\mu}^2 b \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \operatorname{cn} \bar{u}_3}{c^2 \bar{u}_1 \overline{\Delta}} \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)d\xi d\zeta \end{aligned}\right.$$

où $f(t + u_1, \xi, \zeta)$, $\bar{f}'(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta)$ sont deux fonctions arbitraires. Les intégrales (2) seront finies continues et monodromes en $S_{+\nu}$ et $S_{-\nu}$ et seront discontinues sur le plan xz.

3. Il est bien aisé d'obtenir les rotations U, V, W correspondant aux déplacements (2) (voir article 1). Il suffit pour cela d'appliquer les formules (5) et (8) de l'article 4. On trouve ainsi

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
U &= \int \frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{dn} u_3}{a^2 u_1 \Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta \\
&\quad + \int -\frac{\bar{k}^2 \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \overline{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta, \\
V &= \int -\frac{\operatorname{sn} u_2 \operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3}{a b u_1 \Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta \\
&\quad + \int -\frac{\operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \overline{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta, \\
W &= \int -\frac{k^2 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3}{a b u_1 \Delta} \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta \\
&\quad + \int \frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c^2 \bar{u}_1 \overline{\Delta}} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta.
\end{aligned}\right.$$

4. Voyons maintenant les valeurs qu'on trouve pour les quantités u, v, w, U, V, W lorsqu'on s'approche indéfiniment aux points du plan xz. Indiquons par le symbole

$$\lim_{y=+0}$$

la limite qu'on obtient lorsqu'on s'approche d'un point du plan xz du côté S_{+y} et par

$$\lim_{y=-0}$$

la limite qu'on trouve en s'approchant du même point du côté S_{-y}. Conduisons par un point quelconque du plan xz deux droites parallèles aux axes optiques. Le plan xz sera partagé en quatre parties $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$

qu'on peut faire coïncider par une simple translation avec ω_{+s}, ω_{+x}, ω_{-s}, ω_{-x}. Nous représenterons par

$$\int\limits_{\sigma_h \pm \sigma_k}$$

la somme ou la différence de deux intégrales étendues aux deux parties du plan xz qu'on a indiquées par σ_h, σ_k.

Remarquons que la coordonnée u_3 de la 1ère espèce de Weber d'un point du plan xz par rapport à un autre point du même plan peut être donnée par u_3 ou par $\pm 2L - u_3$. (Voir article 3.) Convenons maintenant de prendre, lorsque les deux points sont sur le plan xz,

$$L \geqq u_3 \geqq -L.$$

De même convenons de prendre la coordonnée $\bar{u}_3$ de la seconde espèce relative à deux points du plan xz, telle que

$$\bar{L} \geqq \bar{u}_3 \geqq -\bar{L}.$$

Cela posé, il est bien aisé de déduire des formules (2) les équations suivantes

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\lim_{y=+0} u &= -\lim_{y=-0} u = \int\limits_{\sigma_2-\sigma_4} b\mu \operatorname{sn} u_3 f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1 du_3 \\
&\qquad + \int\limits_{\sigma_1+\sigma_3} b \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1 d\bar{u}_3 \\
\lim_{y=+0} v &= \lim_{y=-0} v = \int\limits_{\sigma_1-\sigma_3} b f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1 du_2 \\
&\qquad + \int\limits_{\sigma_2-\sigma_4} b \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1 d\bar{u}_2, \\
\lim_{y=+0} w &= -\lim_{y=-0} w = \int\limits_{\sigma_2+\sigma_4} b \operatorname{dn} u_3 f(t+u_1, \xi, \zeta)\, du_1 du_3 \\
&\qquad + \int\limits_{\sigma_1-\sigma_3} b \bar{\mu} \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta)\, d\bar{u}_1 d\bar{u}_3.
\end{aligned}\right.$$

Pareillement on obtient les limites de U, V, W lorsqu'on s'approche du plan xz. On a

$$
(5)\quad \left\{
\begin{aligned}
\lim_{y=+0} U = \lim_{y=-0} U &= \int\limits_{\sigma_1+\sigma_3} \frac{b}{a}\,\mathrm{dn}\, u_2 \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\,du_1\,du_2 \\
&\quad + \int\limits_{\sigma_2-\sigma_4} \frac{\bar{k}}{a}\,\mathrm{sn}\, u_2 \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\,d\bar{u}_1\,d\bar{u}_2, \\
\lim_{y=+0} V = -\lim_{y=-0} V &= \int\limits_{\sigma_2-\sigma_4} \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\,du_1\,du_3 \\
&\quad + \int\limits_{\sigma_1-\sigma_3} \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\,d\bar{u}_1\,d\bar{u}_3, \\
\lim_{y=+0} W = \lim_{y=-0} W &= \int\limits_{\sigma_1-\sigma_3} \frac{k}{c}\,\mathrm{sn}\, u_2 \frac{\partial}{\partial t} f(t+u_1\,,\,\xi\,,\,\zeta)\,du_1\,du_2 \\
&\quad + \int\limits_{\sigma_2+\sigma_4} \frac{b}{c}\,\mathrm{dn}\, \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial t} \bar{f}(t+\bar{u}_1)\,du_1\,du_2.
\end{aligned}
\right.
$$

5. Enfin nous remarquerons que les intégrales des équations de Lamé que nous avons trouvées (formules (2)) vérifient la condition

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

c'est à dire elles correspondent à des vibrations transversales du milieu élastique.

Cela ressort de l'observation que nous avons faite dans le § 5 de l'article 4.

ART. 8. ***Intégration des équations de l'optique.***

1. Si les vibrations du milieu élastique sont transversales il faut adjoindre aux équations (2) du 1[er] article l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

On peut alors éliminer la fonction v et l'on trouve les deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + (c^2 - b^2) \dfrac{\partial}{\partial z} \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z} \right), \\[2ex] \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w + (b^2 - a^2) \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial z} \right). \end{cases}$$

Soient ϖ, σ un système d'intégrales des équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varpi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \varpi + (c^2 - b^2) \dfrac{\partial}{\partial z} \left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial x} - \dfrac{\partial \varpi}{\partial z} \right), \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \Delta \sigma + (b^2 - a^2) \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\dfrac{\partial \sigma}{\partial x} - \dfrac{\partial \varpi}{\partial z} \right). \end{cases} \tag{2}$$

Il suffit de prendre

$$u = \frac{\partial \varpi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \varpi}{\partial x} - \frac{\partial \sigma}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial \sigma}{\partial y} \tag{3}$$

pour obtenir un système d'intégrales des équations (2) du premier article qui satisfont à la condition (1) posée ci-dessus.

Réciproquement, démontrons qu'à tout système d'intégrales u, v, w des équations de LAMÉ, qui vérifie la condition (1), correspondent deux fonctions ϖ, σ qui satisfont aux équations (2) et qui sont liées à u, v, w par les relations (3).

En effet, u, v, w, étant données, prenons deux fonctions ϖ_1, σ_1 telles que

$$u = \frac{\partial \varpi_1}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \varpi_1}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_1}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial \sigma_1}{\partial y}. \tag{4}$$

On pourra ajouter à ϖ_1 et σ_1 deux fonctions $\varpi_2(x, z)$, $\sigma_2(x, z)$ qui remplissent la condition

$$\frac{\partial \varpi_2}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} = 0$$

sans que les relations (4) soient altérées.

C'est pourquoi, en posant

$$\varpi_3 = \varpi_1 + \varpi_2, \qquad \sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2,$$

on aura

$$u = \frac{\partial \varpi_3}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \varpi_3}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial \sigma_3}{\partial y}.$$

En substituant les valeurs (4) dans les équations de LAMÉ, on trouvera

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \varpi_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varpi_1 - (c^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_1}{\partial z}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 \varpi_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varpi_1 - (c^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_1}{\partial z}\right)\right]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_1 - (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_1}{\partial z}\right)\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_1 - (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_1}{\partial z}\right)\right] = 0.$$

Par suite

$$\frac{\partial^2 \varpi_1}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varpi_1 - (c^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_1}{\partial z}\right) = f(x, z),$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_1 - (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_1}{\partial z}\right) = \varphi(x, z),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0.$$

Mais il est toujours possible de prendre ϖ_2, σ_2, telles que

$$\frac{\partial^2 \varpi_2}{\partial t^2} - c^2 \Delta \varpi_2 - (c^2 - b^2)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_2}{\partial z}\right) = -f(x, z),$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial t^2} - a^2 \Delta \sigma_2 - (b^2 - a^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - \frac{\partial \varpi_2}{\partial z}\right) = -\varphi(x, z).$$

Donc on aura que ϖ_3, σ_3 rempliront les équations (2) ce qu'il fallait démontrer.

2. D'après cela on conclut qu'il suffit d'intégrer le système (2) pour intégrer les équations de l'optique. Appliquons les formules (2) de l'article précédent. On aura que

$$(5)\begin{cases} u = u' + u'' = \int \psi_1 f(t + u_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta + \int \bar{\psi}_1 \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta, \\ v = v' + v'' = \int \psi_2 f(t + u_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta + \int \bar{\psi}_2 \bar{f}(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta \end{cases}$$

formeront un système d'intégrales des équations (2).

Même

$$\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$$

seront des intégrales des équations (2). Pour calculer ces quantités, remarquons que l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \quad W + \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -U + \frac{\partial v}{\partial z}$$

où

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial(v' + v'')}{\partial x}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial(v' + v'')}{\partial z}.$$

Mais

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = \int \frac{\partial}{\partial x} [\psi_2 f(u_1 + t, \xi, \zeta)] d\xi d\zeta$$

$$= \int \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} f(u_1 + t, \xi, \zeta) + \psi_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right] d\xi d\zeta.$$

Or il est aisé de voir que

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = -\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial x} = -\frac{\partial u_1}{\partial \xi}.$$

Par suite

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = \int \left[-\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} f(t + u_1, \xi, \zeta) - \psi_2 \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \right] d\xi d\zeta.$$

En supposant f continue et nulle pour ξ, ζ infinies, on aura, par une intégration par parties

$$\frac{\partial v'}{\partial x} = \int \psi_2 f'_\xi(t + u_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta. \tag{6}$$

Un calcul tout à fait analogue nous conduit aux équations

$$\frac{\partial v''}{\partial x} = \int \bar{\psi}_1 \bar{f}'_\xi(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta, \tag{6'}$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z} = \int \psi_2 f'_\zeta(t + u_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v''}{\partial z} = \int \bar{\psi}_2 \bar{f}'_\zeta(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta. \tag{7'}$$

Dans les formules précédentes on a désigné par

$$f'_\xi, \ \bar{f}'_\xi, \ f'_\zeta, \ \bar{f}'_\zeta,$$

les dérivées partielles des fonctions $f, \bar{f}$ par rapport à ξ, ζ calculées en regardant, u_1, ξ, ζ comme des variables indépendantes.

On aura donc

$$(8) \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = W + \int \psi_2 f'_\xi(t + u_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta + \int \bar{\psi}_2 \bar{f}'_\xi(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta, \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = -U + \int \psi_2 f'_\zeta(t + u_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta + \int \bar{\psi}_2 \bar{f}'_\zeta(t + \bar{u}_1, \xi, \zeta) d\xi d\zeta. \end{cases}$$

Par l'addition des expressions (5) avec les expressions (8) dans lesquelles on ait remplacé les fonctions arbitraires f et $\bar{f}$ par les autres fonctions arbitraires $g, \bar{g}$, on trouvera les intégrales suivantes des équations (2)

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\varpi = & \int \Big[-\frac{\mu^2 b}{a} \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_3 f(t+u_1, \xi, \zeta) \\
& \qquad - \frac{k^2}{b} \operatorname{sn} u_2 \operatorname{cn} u_2 \frac{\partial}{\partial t} g(t+u_1, \xi, \zeta) \\
& \qquad - \operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_3 g'_\xi(t+u_1, \xi, \zeta) \Big] \frac{\operatorname{sn} u_3}{a u_1 \Delta} d\xi d\zeta \\
& + \int \Big[\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) \\
& \qquad + \frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) \\
& \qquad - \operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{g}'_\xi(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) \Big] \frac{\operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}} d\xi d\zeta, \\
\sigma = & \int \Big[\operatorname{dn} u_2 \operatorname{cn} u_3 f(t+u_1, \xi, \zeta) - \frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_2}{a} \frac{\partial}{\partial t} g(t+u_1, \xi, \zeta) \\
& \qquad - \operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3 g'_\zeta(t+u_1, \xi, \zeta) \Big] \frac{\operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} d\xi d\zeta \\
& + \int \Big[-\frac{\bar{\mu}^2 b}{c} \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_3 \bar{f}(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) \\
& \qquad + \frac{\bar{k}^2}{b} \operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{cn} \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial t} g(t+\bar{u}_1, \xi, \zeta) \\
& \qquad - \operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{g}'_\zeta(t+u_1, \xi, \zeta) \Big] \frac{\operatorname{sn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}} d\xi d\zeta.
\end{aligned}
\right.
$$

3. Il suffit maintenant de se rappeler que

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - (c^2 - b^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right],
$$

$$
\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - b^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (b^2 - a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right]
$$

pour calculer les dérivées

$$
\frac{\partial \varpi}{\partial y}, \frac{\partial \sigma}{\partial y}.
$$

En supposant que les dérivées $f'_\xi, \bar{f}'_\xi, f'_\zeta, \bar{f}'_\zeta, g'_\xi, g'_\zeta, \bar{g}'_\xi, \bar{g}'_\zeta$ soient continues dérivables et s'annullent pour ξ, ζ infinies, on trouvera par des intégrations par parties

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\varpi}{\partial y} = \int \Bigg\{ & \left[-\frac{k^2}{b}\operatorname{sn} u_2 f'_t - \operatorname{dn} u_3 f'_\xi\right]\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{sn} u_3}{a u_1 \Delta} \\
& + \frac{1}{c^2}\left[-\frac{\mu^2 b}{a}\operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 (g''_t - c^2 g''_\xi - b^2 g''_\zeta)\right. \\
& \left. - (c^2 - b^2)\operatorname{dn} u_2 \operatorname{dn} u_3 g''_{\xi\zeta}\right]\frac{\operatorname{cn} u_3}{a u_1 \Delta}\Bigg\} d\xi d\zeta \\
+ \int \Bigg\{ & \left[\frac{1}{c}\operatorname{dn} \bar{u}_2 \bar{f}'_t - \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{f}'_\xi\right]\frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \\
& + \frac{1}{c^2}\left[\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_3 (\bar{g}''_t - c^2 \bar{g}''_\xi - b^2 \bar{g}''_\zeta)\right. \\
& \left. + (c^2 - b^2)\frac{\bar{\mu}^2 b}{c}\operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{g}''_{\xi\zeta}\right]\frac{\operatorname{cn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}}\Bigg\} d\xi d\zeta, \\
\frac{\partial\sigma}{\partial y} = \int \Bigg\{ & \left[-\frac{1}{a}\operatorname{dn} u_2 f'_t - \operatorname{sn} u_3 f'_\zeta\right]\frac{\operatorname{cn} u_2 \operatorname{dn} u_3}{a u_1 \Delta} \\
& + \frac{1}{a^2}\left[\operatorname{dn} u_2 \operatorname{dn} u_3 (g''_t - b^2 g''_\xi - a^2 g''_\zeta)\right. \\
& \left. - \frac{\mu^2 b}{a}(b^2 - a^2)\operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn} u_3 g''_{\xi\zeta}\right]\frac{\operatorname{cn} u_3}{a u_1 \Delta}\Bigg\} d\xi d\zeta \\
+ \int \Bigg\{ & \left[\frac{\bar{k}^2}{b}\operatorname{sn} \bar{u}_2 \bar{f}'_t - \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{f}'_\zeta\right]\frac{\operatorname{cn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}} \\
& + \frac{1}{a^2}\left[-\frac{\bar{\mu}^2 b}{c}\operatorname{sn} \bar{u}_2 \operatorname{sn} \bar{u}_3 (\bar{g}''_t - b^2 \bar{g}''_\xi - a^2 \bar{g}''_\zeta)\right. \\
& \left. + (b^2 - a^2)\operatorname{dn} \bar{u}_2 \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{g}''_{\xi\zeta}\right]\frac{\operatorname{cn} \bar{u}_3}{c \bar{u}_1 \bar{\Delta}}\Bigg\} d\xi d\zeta
\end{aligned}
\right.
$$

où $g''_t, g''_\xi, g''_{\xi\zeta}$, etc. sont les dérivées partielles du 2ᵉ ordre de la fonction g par rapport aux variables t, ξ, ζ, en supposant u_1, ξ, ζ des variables indépendantes.

4. Il est aisé maintenant de déterminer les limites de ϖ, σ, $\frac{\partial \varpi}{\partial y}$, $\frac{\partial \sigma}{\partial y}$ lorsqu'on s'approche indéfiniment aux points du plan xz. On a (voir article 7, § 4)

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad \lim_{y=\pm 0} \varpi = & \int_{\sigma_1} \left[\left(\frac{k}{c}\operatorname{sn} u_2 g'_\iota + b g'_\xi\right) du_1\, du_2 \pm b \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{f} d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3\right] \\
& + \int_{\sigma_2} \left[\pm b\mu \operatorname{sn} u_3 f du_1\, du_3 + \left(\frac{b}{c}\operatorname{dn} \bar{u}_2 \bar{g}'_\iota + b\bar{g}'_\xi\right) d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2\right] \\
& + \int_{\sigma_3} \left[\pm b \operatorname{dn} \bar{u}_3 \bar{f} d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3 - \left(b g'_\xi + \frac{k}{c}\operatorname{sn} u_2 g'_\iota\right) du_1\, du_2\right] \\
& + \int_{\sigma_4} \left[\mp b\mu \operatorname{sn} u_3 f du_1\, du_3 + \left(\frac{b}{c}\operatorname{dn} \bar{u}_2 \bar{g}'_\iota - b\bar{g}'_\xi\right) d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad \lim_{y=\pm 0} \sigma = & \int_{\sigma_1} \left[\left(-\frac{b}{a}\operatorname{dn} u_2 g'_\iota + b g'_\zeta\right) du_1\, du_2 \pm b\bar{\mu} \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{f} d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3\right] \\
& + \int_{\sigma_2} \left[\pm b \operatorname{dn} u_3 f du_1\, du_3 + \left(-\frac{\bar{k}}{a}\operatorname{sn} \bar{u}_2 \bar{g}'_\iota + b\bar{g}'_\zeta\right) d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2\right] \\
& + \int_{\sigma_3} \left[\left(-\frac{b}{a}\operatorname{dn} u_2 g'_\iota - b g'_\zeta\right) du_1\, du_2 \mp b\bar{\mu} \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{f} d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3\right] \\
& + \int_{\sigma_4} \left[\pm b \operatorname{dn} u_3 f du_1\, du_3 + \left(\frac{\bar{k}}{a}\operatorname{sn} \bar{u}_2 \bar{g}'_\iota - b\bar{g}'_\zeta\right) d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad \lim_{y=\pm 0} \frac{\partial \varpi}{\partial y} = & \int_{\sigma_1} \Bigg\{ \left[\frac{k}{c}\operatorname{sn} u_2 f'_\iota + b f'_\xi\right] du_1\, du_2 \\
& \pm \left[\frac{b}{c^2}\operatorname{dn} \bar{u}_3 (\bar{g}''_\iota - c^2 \bar{g}''_\xi - b^2 \bar{g}''_\zeta) - \frac{c^2 - b^2}{c^2} b\bar{\mu} \operatorname{sn} \bar{u}_3 \bar{g}''_{\xi\zeta}\right] d\bar{u}_1\, d\bar{u}_3 \Bigg\} \\
& + \int_{\sigma_2} \Bigg\{ \pm \left[\frac{b\mu}{c^2}\operatorname{sn} u_3 (g''_\iota - c^2 g''_\xi - b^2 g''_\zeta) - \frac{c^2 - b^2}{c^2} b \operatorname{dn} u_3 g''_{\xi\zeta}\right] du_1\, du_3 \\
& + \left[\frac{b}{c}\operatorname{dn} \bar{u}_2 \bar{f}'_\iota + b\bar{f}'_\xi\right] d\bar{u}_1\, d\bar{u}_2 \Bigg\}
\end{aligned}
$$

$$+\int_{\sigma_3}\Big\{-\left[\frac{k}{c}\operatorname{sn} u_2 f'_\iota + b f'_\xi\right]du_1\,du_2$$

$$\pm\left[\frac{b}{c^2}\operatorname{dn}\bar{u}_3(\bar{g}''_\iota - c^2\bar{g}''_\xi - b^2\bar{g}''_\zeta) + \frac{c^2-b^2}{c^2}\,b\bar{\mu}\operatorname{sn}\bar{u}_3\bar{g}''_{\xi\zeta}\right]d\bar{u}_1\,d\bar{u}_3\Big\}$$

$$+\int_{\sigma_4}\Big\{\mp\left[\frac{b\mu}{c^2}\operatorname{sn} u_3(g''_\iota - c^2 g''_\xi - b^2 g''_\zeta) + \frac{c^2-b^2}{c^2}\,b\operatorname{dn} u_3 g''_{\xi\zeta}\right]du_1\,du_3$$

$$+\left[\frac{b}{c}\operatorname{dn}\bar{u}_2\bar{f}'_\iota - b\bar{f}'_\xi\right]d\bar{u}_1\,d\bar{u}_2\Big\},$$

$$\lim_{y=\pm 0}\frac{\partial\sigma}{\partial y} = \int_{\sigma_1}\Big\{\left[-\frac{b}{a}\operatorname{dn} u_2 f'_\iota + b f'_\zeta\right]du_1\,du_2 \tag{14}$$

$$\pm\frac{1}{a^2}[b\bar{\mu}\operatorname{sn}\bar{u}_3(\bar{g}''_\iota - b^2\bar{g}''_\xi - a^2\bar{g}''_\zeta) + (b^2-a^2)\,b\operatorname{dn}\bar{u}_3\bar{g}''_{\xi\zeta}]\,d\bar{u}_1\,d\bar{u}_3\Big\}$$

$$+\int_{\sigma_2}\Big\{\pm\frac{1}{a^2}[b\operatorname{dn} u_3(g''_\iota - b^2 g''_\xi - a^2 g''_\zeta) + b\mu(b^2-a^2)\operatorname{sn} u_3 g''_{\xi\zeta}]\,du_1\,du_3$$

$$+\left[-\frac{\bar{k}}{a}\operatorname{sn}\bar{u}_2\bar{f}'_\iota + b\bar{f}'_\zeta\right]d\bar{u}_1\,d\bar{u}_2\Big\}$$

$$+\int_{\sigma_3}\Big\{\left[-\frac{b}{a}\operatorname{dn} u_2 f'_\iota - b f'_\zeta\right]du_1\,du_2$$

$$\mp\frac{1}{a^2}[b\bar{\mu}\operatorname{sn}\bar{u}_3(\bar{g}''_\iota - b^2\bar{g}''_\xi - a^2\bar{g}''_\zeta) - (b^2-a^2)\,b\operatorname{dn}\bar{u}_3\bar{g}''_{\xi\zeta}]\,d\bar{u}_1\,d\bar{u}_3\Big\}$$

$$+\int_{\sigma_4}\Big\{\pm\frac{1}{a^2}[b\operatorname{dn} u_3(g''_\iota - b^2 g''_\xi - a^2 g''_\zeta) - b\mu(b^2-a^2)\operatorname{sn} u_3 g''_{\xi\zeta}]\,du_1\,du_3$$

$$+\left[\frac{\bar{k}}{a}\operatorname{sn}\bar{u}_2\bar{f}'_\iota - b\bar{f}'_\zeta\right]d\bar{u}_1\,d\bar{u}_2\Big\}.$$

5. On peut conclure que les fonctions (9) remplissent les conditions suivantes:

1°) Elles sont finies monodromes et continues pour toutes les valeurs de x, z et pour $y > 0$.

2°) Elles satisfont aux équations différentielles (2).

3°) Les valeurs de ces fonctions et de leurs dérivées par rapport à y, pour $y = 0$ dépendent de quatre fonctions arbitraires f, $\bar{f}$, g, $\bar{g}$ de trois variables indépendantes.

Pour prouver tout à fait rigoureusement qu'on a trouvé ainsi les intégrales générales, il faudrait démontrer que les valeurs de ϖ et de σ et de leurs dérivées par rapport à y pour $y = 0$ sont arbitraires. Pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, nous faisons noter que lorsque nous avons parlé dans l'introduction d'intégrales générales, nous avons entendu les intégrales qui satisfont aux trois conditions précédentes.

Art. 9. *Application aux équations de l'électrodynamique.*

1. L'expérience montre que les cristaux transparents peuvent être regardés approximativement comme des corps isotropes pour le magnétisme. Dans la théorie électromagnétique de la lumière on prouve que les équations de l'électrodynamique dans le cas d'un milieu qui n'est pas conducteur et qui est électriquement anisotrope et magnétiquement isotrope se réduisent aux équations de Lamé.[1]

Il est tout à fait aisé de montrer que l'on peut appliquer les résultats que nous avons trouvés aux équations de l'électrodynamique pour un milieu qui n'est pas conducteur, même s'il n'est pas isotrope pour le magnétisme, pourvu que l'on suppose, comme fait M. Hertz, que les axes de symétrie de l'énergie électrique coïncident entre eux.

Partons des équations (20 a), (20 b) données par M. Hertz dans son mémoire sur les équations de l'électrodynamique pour les corps en repos[2]

$$
(1\,a) \qquad \begin{cases} A\mu_1 \dfrac{\partial L}{\partial t} = \dfrac{\partial Z}{\partial y} - \dfrac{\partial Y}{\partial z}, \\[2ex] A\mu_2 \dfrac{\partial M}{\partial t} = \dfrac{\partial X}{\partial z} - \dfrac{\partial Z}{\partial x}, \\[2ex] A\mu_3 \dfrac{\partial N}{\partial t} = \dfrac{\partial Y}{\partial x} - \dfrac{\partial X}{\partial y}, \end{cases}
$$

[1] Voir Volkmann, *Vorlesungen über die Theorie des Lichtes*, § 56.

[2] Göttinger Nachr. v. 19 März 1890. Wiedemanns Ann., T. 40. p. 577.

$$(1\,b)\qquad \begin{cases} A\varepsilon_1 \dfrac{\partial X}{\partial t} = \dfrac{\partial M}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial y}, \\ A\varepsilon_2 \dfrac{\partial Y}{\partial t} = \dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial z}, \\ A\varepsilon_3 \dfrac{\partial Z}{\partial t} = \dfrac{\partial L}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial x} \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter

$$(2\,a)\qquad \mu_1 \frac{\partial L}{\partial x} + \mu_2 \frac{\partial M}{\partial y} + \mu_3 \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

$$(2\,b)\qquad \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial x} + \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial y} + \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Posons

$$\sqrt{\mu_1}\,X = X', \qquad \sqrt{\mu_2}\,Y = Y', \qquad \sqrt{\mu_3}\,Z = Z',$$

$$\mu_1\sqrt{\mu_2\mu_3}\,L = u, \qquad \mu_2\sqrt{\mu_3\mu_1}\,M = v, \qquad \mu_3\sqrt{\mu_1\mu_2}\,N = w,$$

$$\sqrt{\mu_1}\,\xi = x, \qquad \sqrt{\mu_2}\,\eta = y, \qquad \sqrt{\mu_3}\,\zeta = z$$

on aura

$$A\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial Z'}{\partial \eta} - \frac{\partial Y'}{\partial \zeta},$$

$$A\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial X'}{\partial \zeta} - \frac{\partial Z'}{\partial \xi},$$

$$A\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial Y'}{\partial \xi} - \frac{\partial X'}{\partial \eta},$$

$$A\varepsilon_1\mu_2\mu_3 \frac{\partial X'}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \eta},$$

$$A\varepsilon_2\mu_3\mu_1 \frac{\partial Y'}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$A\varepsilon_3\mu_1\mu_2 \frac{\partial Z'}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi}.$$

Remplaçons

$$A^2\varepsilon_1\mu_2\mu_3\ ,\ A^2\varepsilon_2\mu_3\mu_1\ ,\ A^2\varepsilon_3\mu_1\mu_2$$

par

$$\frac{1}{a^2},\quad \frac{1}{b^2},\quad \frac{1}{c^2}.$$

Les égalités précédentes deviendront

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial W}{\partial \eta} - b^2\frac{\partial V}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial U}{\partial \zeta} - c^2\frac{\partial W}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b^2\frac{\partial V}{\partial \xi} - a^2\frac{\partial U}{\partial \eta},$$

$$U = \frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial w}{\partial \eta},$$

$$V = \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$W = \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

et l'égalité (2 a) pourra s'écrire

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0.$$

Par conséquent on trouve les équations de Lamé.

2. Examinons maintenant un cas plus général. Supposons que le corps soit conducteur et les axes de symétrie par rapport à la conductibilité coïncident avec ceux relatives aux énergies électrique et magné-

tique. En prenant les lignes x, y, z parallèles à ces axes, les équations (7 a), (7 b) du mémoire de M. HERTZ, pourront s'écrire

$$
(3\,\mathrm{a}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
A\mu_1 \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\
A\mu_2 \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\
A\mu_3 \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(3\,\mathrm{b}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
A\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} + 4\pi A\lambda_1(X - X') &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, \\
A\varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} + 4\pi A\lambda_2(Y - Y') &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, \\
A\varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} + 4\pi A\lambda_3(Z - Z') &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons

$$\varepsilon_1\sqrt{\varepsilon_2\varepsilon_3}\,X = u, \qquad \varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_3\varepsilon_1}\,Y = v, \qquad \varepsilon_3\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}\,Z = w,$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,L = L', \qquad \sqrt{\varepsilon_2}\,M = M', \qquad \sqrt{\varepsilon_3}\,N = N',$$

$$\sqrt{\varepsilon_1}\,\xi = x, \qquad \sqrt{\varepsilon_2}\,\eta = y, \qquad \sqrt{\varepsilon_3}\,\zeta = z,$$

$$A^2\mu_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = \frac{1}{a^2}, \qquad A^2\mu_2\varepsilon_3\varepsilon_1 = \frac{1}{b^2}, \qquad A^2\mu_3\varepsilon_1\varepsilon_2 = \frac{1}{c^2},$$

$$4\pi\frac{\lambda_1}{\varepsilon_1} = k_1, \qquad 4\pi\frac{\lambda_2}{\varepsilon_2} = k_2, \qquad 4\pi\frac{\lambda_3}{\varepsilon_3} = k_3,$$

on trouvera par le même procédé que nous avons suivi dans le paragraphe précédent

$$(4\,a)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} + k_1 \dfrac{\partial u}{\partial t} = b^2 \dfrac{\partial V}{\partial \zeta} - c^2 \dfrac{\partial W}{\partial \eta}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} + k_2 \dfrac{\partial v}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial W}{\partial \xi} - a^2 \dfrac{\partial U}{\partial \zeta}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k_3 \dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial U}{\partial \eta} - b^2 \dfrac{\partial V}{\partial \xi}, \end{cases}$$

$$(4\,b)\qquad \begin{cases} U = \dfrac{\partial w}{\partial \eta} - \dfrac{\partial v}{\partial \zeta}, \\[2ex] V = \dfrac{\partial u}{\partial \zeta} - \dfrac{\partial w}{\partial \xi}, \\[2ex] W = \dfrac{\partial v}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Supposons

$$k_1 = k_2 = k_3 = k.$$

Posons

$$u = f(t)\, u_1(\xi, \eta, \zeta),$$

$$v = f(t)\, v_1(\xi, \eta, \zeta),$$

$$w = f(t)\, w_1(\xi, \eta, \zeta),$$

u_1, v_1, w_1, étant des fonctions indépendantes de t.

En substituant ces valeurs dans les équations (4 a), (4 b) on trouvera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + k \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha f = 0,$$

$$(5\,a)\qquad \begin{cases} 0 = a u_1 + b^2 \dfrac{\partial V_1}{\partial \zeta} - c^2 \dfrac{\partial W_1}{\partial \eta}, \\[2ex] 0 = a v_1 + c^2 \dfrac{\partial W_1}{\partial \xi} - a^2 \dfrac{\partial U_1}{\partial \zeta}, \\[2ex] 0 = a w_1 + a^2 \dfrac{\partial U_1}{\partial \eta} - b^2 \dfrac{\partial V_1}{\partial \xi}, \end{cases}$$

$$(5\,b)\qquad \begin{cases} U_1 = \dfrac{\partial w_1}{\partial \eta} - \dfrac{\partial v_1}{\partial \zeta}, \\[2ex] V_1 = \dfrac{\partial u_1}{\partial \zeta} - \dfrac{\partial w_1}{\partial \xi}, \\[2ex] W_1 = \dfrac{\partial v_1}{\partial \xi} - \dfrac{\partial u_1}{\partial \eta} \end{cases}$$

où α est une quantité constante.

Même les équations de Lamé se réduisent à la forme précédente en posant

$$u = e^{\sqrt{-\alpha}\,t} u_1,$$

$$v = e^{\sqrt{-\alpha}\,t} v_1,$$

$$w = e^{\sqrt{-\alpha}\,t} w_1.$$

Particularisons les fonctions arbitraires qui paraissent dans les intégrales de Lamé en prenant

$$f(x) = \bar{f}(x) = e^{\sqrt{-\alpha}\,x},$$

$$\varphi(x) = \bar{\varphi}(x) = 0$$

on trouvera, après avoir divisé par $e^{\sqrt{-\alpha}\,t}$, des intégrales des équations (5 a), (5 b) et par là on aura des intégrales des équations (4 a), (4 b). On pourra appliquer évidemment le même procédé aux intégrales trouvées dans l'art. 8, et par une méthode bien connue on obtiendra ainsi l'intégration des équations (4 a), (4 b).

Les résultats qu'on a trouvés dans les articles précédents peuvent donc s'étendre aisément aux équations de l'électrodynamique lorsque les rapports k_1, k_2, k_3 sont egaux.

SUR LES DÉTERMINANTS INFINIS ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

HELGE von KOCH

à STOCKHOLM.

Dans une note récente,[1] j'ai appelé l'attention sur le parti qu'on peut tirer des déterminants infinis pour la théorie générale des équations différentielles linéaires et, particulièrement, pour la résolution du problème suivant. Étant donnée une équation différentielle linéaire homogène dont les coefficients sont holomorphes à l'intérieur d'un certain anneau circulaire: obtenir pour ce domaine un système fondamental d'intégrales sous la forme analytique qui, d'après les recherches de M. Fuchs,[2] caractérise toujours les intégrales à l'intérieur d'une telle partie du plan.

Grâce aux travaux de MM. Fuchs, Hamburger, Picard et Mittag-Leffler,[3] on possède des méthodes pour résoudre *implicitement* le problème, c'est-à-dire, on peut trouver certaines formules analytiques qui donnent les intégrales pour le domaine considéré sous une forme qui est, toutefois, essentiellement différente de celle signalée primitivement par M. Fuchs.

---

[1] *Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires,* Acta mathematica, t. 15.

[2] Fuchs, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.* Journal für Mathematik, t. 66.

[3] Fuchs, Journal für Mathematik, t. 75; Hamburger, Journal für Mathematik, t. 83; Picard, Comptes rendus des séances de l'académie des sciences de Paris, Mars 1879; Mittag-Leffler, Acta mathematica, t. 15.

Le problème direct, qui consiste à obtenir les intégrales sous leur forme explicite, a été l'objet de recherches nombreuses, parmi lesquelles il convient de rappeler ici celles de M. FUCHS déjà citées et celles de M. THOMÉ.[1] Ces auteurs ne se sont pourtant occupés que de certains cas particuliers. De plus, on sait que les recherches profondes et extrêmement remarquables qu'a publiées M. POINCARÉ[2] au sujet des intégrales irrégulières, n'ont pas eu pour but d'obtenir actuellement ces intégrales, mais de les représenter asymptotiquement au moyen de certaines séries divergentes.

Dans la note citée, j'ai indiqué comment on pourrait traiter le problème d'une manière générale à l'aide des déterminants infinis, mais je n'ai donné la solution définitive que sous certaines restrictions. Dans le mémoire présent, le problème sera résolu dans toute sa généralité. Pour atteindre ce but, il faut d'abord s'occuper un peu de la théorie des déterminants infinis. En effet, cette théorie nouvelle dont l'introduction dans l'analyse est due à MM. HILL[3] et POINCARÉ,[4] n'a pas encore, à ce qu'il paraît, captivé l'attention des géomètres tant qu'elle le mérite et, naturellement, il doit rester bien des lacunes à combler et beaucoup de théorèmes à établir. Dans ce qui suit nous nous bornerons à développer (I, § 1) ce qui paraît nécessaire pour pouvoir appliquer l'instrument nouveau d'une manière absolument rigoureuse au problème que nous nous sommes proposé.

Le § 2 contient une application des déterminants infinis à la résolution de certains systèmes d'équations linéaires où le nombre des inconnus de même que celui des équations est infini.

Dans la partie II se trouvent les appliquations qui se rapportent à la théorie des équations différentielles linéaires.

---

[1] THOMÉ, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen*, Journal für Mathematik, t. 74 et suiv.

[2] POINCARÉ, *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires*, Acta mathematica, t. 8. Voir aussi: *Sur les équations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies*, American Journal of Mathematics, t. 7.

[3] HILL, *On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon*, Cambridge, Wilson 1877; Acta mathematica, t. 8.

[4] POINCARÉ, *Sur les déterminants d'ordre infini*, Bulletin de la Société mathématique de France, t. 14.

I.

§ 1. *Sur quelques propriétés des déterminants infinis.*

1. Soit A_{ik} $(i, k = -\infty \, .. + \infty)$ une suite doublement infinie de nombres donnés et désignons par

$$D_m = [A_{ik}]_{i,k=-m..+m}$$

le déterminant des quantités A_{ik} $(i, k = -m \, .. + m)$; si, pour des valeurs indéfiniment croissantes de m, la quantité D_m a une limite déterminée D, on dit que le déterminant infini

$$[A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

est convergent et a D pour valeur. Dans le cas où la limite D n'existe pas, le déterminant en question sera dit divergent. En d'autres termes, le déterminant infini

$$[A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

est convergent, si à chaque quantité positive δ correspond un nombre positif entier n' tel qu'on ait

$$|D_{n+p} - D_n| < \delta$$

pour toute valeur de n supérieure à n' et pour des valeurs quelconques de l'entier positif p; le déterminant est divergent, si un tel nombre n' n'existe pas.

Convenons d'adopter les dénominations suivantes. La *diagonale principale* du déterminant D est l'ensemble des éléments A_{ii} $(i = -\infty \, .. + \infty)$; la *ligne* i est constituée par les éléments A_{ik} $(k = -\infty \, .. + \infty)$ et la *colonne* k par les éléments A_{ik} $(i = -\infty \, .. + \infty)$. Un élément quelconque A_{ik} s'appellera élément *diagonal* ou *non-diagonal* suivant qu'on a $i = k$ ou $i \gtrless k$. Enfin, l'élément A_{00} sera nommé *l'origine* du déterminant considéré: c'est celui des éléments diagonaux qui appartient à la fois aux deux diagonales de chacun des déterminants D_m.

Il est clair qu'on peut former avec les éléments A_{ik} une infinité de déterminants infinis ayant les mêmes diagonales principales mais des origines différentes; rien ne permet d'affirmer *a priori* qu'ils sont convergents ou divergents en même temps ou, s'ils convergent, que leurs valeurs sont les mêmes. Un déterminant infini n'aura donc en général aucun sens déterminé que quand on connait sa diagonale principale et son origine.

2. Soit donné un déterminant infini D; pour que D converge, il suffit que le produit des éléments diagonaux converge absolument et que la somme des éléments non-diagonaux converge absolument.

Posons, en effet, $A_{ik} = a_{ik}$ (pour $i \gtrless k$) et $A_{ii} = 1 + a_{ii}$: par hypothèse, la série

$$\sum_i \sum_k | a_{ik} | \qquad (i,k = -\infty..+\infty)$$

est convergente, d'où l'on conclut immédiatement qu'il en est de même du produit

$$\bar{P} = \prod_i (1 + \sum_k | a_{ik} |). \qquad (i,k = -\infty.+\infty)$$

Formons les produits

$$P_m = \prod_{i=-m}^{+m} (1 + \sum_{k=-m}^{+m} a_{ik}); \qquad \bar{P}_m = \prod_{i=-m}^{+m} (1 + \sum_{k=-m}^{+m} | a_{ik} |);$$

si, dans le développement de P_m, on remplace certains termes par zéro et change les signes de certains autres termes, on obtiendra D_m; par conséquent, à chaque terme dans le développement de D_m correspond un terme dans le développement de $\bar{P}_m$ de telle manière que celui-ci n'est jamais plus petit que la valeur absolue de celui-là; de plus, en remplaçant certaines quantités a_{ik} par zéro, certains termes s'annulleront dans les développements de D_{m+p} et $\bar{P}_{m+p}$ et, parmi les termes de $\bar{P}_{m+p}$ qui s'évanouissent, on trouvera évidemment ceux qui correspondent aux termes annullés de D_{m+p}; or, en remplaçant les quantités a_{ik} $[i, k = \pm(m+1), .., \pm(m+p)]$ par zéro, D_{m+p} et $\bar{P}_{m+p}$ deviennent égaux à D_m et $\bar{P}_m$ de sorte que, dans ce cas, $D_{m+p} - D_m$ et $\bar{P}_{m+p} - \bar{P}_m$ représentent respectivement les termes de D_{m+p} et $\bar{P}_{m+p}$ qui s'annullent. Par conséquent, on a

$$| D_{m+p} - D_m | \leqq \bar{P}_{m+p} - \bar{P}_m.$$

En vertu de la convergence du produit $\overline{P}$, on peut faire correspondre à chaque quantité positive δ un entier positif n' tel qu'on ait, pour $n > n'$ et pour des valeurs quelconques de l'entier positif p,

$$\overline{P}_{n+p} - \overline{P}_n < \delta \ \therefore\ |D_{n+p} - D_n| < \delta,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Pour le cas où les éléments diagonaux sont tous égaux à l'unité, ce théorème est dû à M. Poincaré (Bulletin de la Société mathématique de France, t. 14, p. 77).

L'étude des déterminants infinis dont les éléments remplissent les conditions énoncées plus haut et dont la convergence vient d'être établie, sera l'objet principal des pages suivantes. Nous convenons de dire que ces déterminants sont de la *forme normale.*

3. Dans le n° 1 nous avons défini un déterminant convergent comme la limite D vers laquelle tendent les déterminants D_m pour des valeurs indéfiniment croissantes de m. Dans le cas des déterminants de la forme normale, on voit facilement qu'un mode de génération plus général conduit au même résultat. Désignons par $D_{m,n}$ le déterminant $[A_{ik}]_{i,k=-n..+m}$ et par $\overline{P}_{m,n}$ le produit

$$\overline{P}_{m,n} = \prod_{i=-n}^{+m}(1 + \sum_{k=-n}^{+m}|a_{ik}|);$$

si p désigne le plus grand des nombres m et n, il est clair que tous les termes de $D_{m,n}$ se trouvent dans le développement de $D_{p,p}$ et que chaque terme de $\overline{P}_{m,n}$ est aussi un terme de $\overline{P}_{p,p}$, d'où il suit, en raisonnant comme plus haut, que

$$|D_{p,p} - D_{m,n}| \leqq \overline{P}_{p,p} - \overline{P}_{m,n};$$

or, pour des valeurs indéfiniment croissantes de m et de n, les quantités $\overline{P}_{p,p}$, $\overline{P}_{m,n}$ tendent vers la même limite $\overline{P}$; donc $D_{p,p}$ et $D_{m,n}$ tendent vers une limite commune et, comme $D_{p,p}$ désigne le même déterminant que nous avons désigné auparavant par D_p, cette limite est égale à D. Donc, pour définir le déterminant D, on peut faire usage des déterminants $D_{m,n}$ tout aussi bien que des déterminants D_m du n° 1.

Appliquons ce résultat à un cas particulier. Soit λ un entier quelconque, mais déterminé, et posons, pour un moment,

$$D_{m,m} = D_m, \qquad D_{m+\lambda,m-\lambda} = \Delta_m;$$

les deux suites infinies

$$(D) \qquad D_0, D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$$

$$(\Delta) \qquad \Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m, \ldots$$

auront la même limite D; or nous savons, d'après le n° 1, que la suite (D) définit le déterminant $[A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$ et que (Δ) définit le déterminant $[A_{\lambda+i,\lambda+k}]_{i,k=-\infty..+\infty}$ c'est-à-dire celui qu'on obtient en choisissant l'élément $A_{\lambda\lambda}$ pour origine dans la table des éléments A_{ik}. Par conséquent, dans un déterminant de la forme normale, on peut prendre un élément diagonal quelconque pour origine: la valeur du déterminant reste toujours la même.

4. Un déterminant de la forme normale reste convergent si l'on remplace les éléments d'une ligne quelconque par une suite de quantités qui sont toutes plus petites en valeur absolue qu'un nombre positif donné.

Remplaçons, par exemple, les éléments de la ligne numérotée 0:

$$\ldots A_{0,-m} \ldots A_{00} \ldots A_{0,m} \ldots$$

par des quantités

$$\ldots \mu_{-m} \ldots \mu_0 \ldots \mu_m \ldots$$

vérifiant l'inégalité

$$|\mu_r| < \mu, \qquad \mu \geqq 0,$$

et soient D'_m et D' ce que deviennent D_m et D. Désignons de plus par $\overline{P}'_m$ et $\overline{P}'$ les produits obtenus en supprimant dans $\overline{P}_m$ et $\overline{P}$ le facteur correspondant à l'indice 0; on voit immédiatement qu'aucun terme de D'_m ne peut être plus grand en valeur absolue que le terme correspondant du développement de $\mu\overline{P}'_m$ et, en raisonnant comme dans le n° 2, on obtient

$$|D'_{m+p} - D'_m| \leqq \mu\overline{P}'_{m+p} - \mu\overline{P}'_m,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Ce théorème, démontré par M. POINCARÉ pour le cas où tous les éléments de la diagonale principale sont égaux à 1, peut facilement être généralisé. En se servant d'un mode de démonstration parfaitement analogue au précédent, on peut prouver qu'un déterminant de la forme normale reste convergent si l'on remplace les éléments d'un nombre quelconque de lignes ou de colonnes par des quantités qui sont, en valeur absolue, inférieures à une quantité donnée.

5. En conservant les notations du numéro précédent, il est clair qu'on a:

$$|D| \leqq \overline{P}; \qquad |D'| \leqq \mu \overline{P}'.$$

En effet, les inégalités ou égalités

$$|D_m| \leqq \overline{P}_m \leqq \overline{P}; \qquad |D'_m| \leqq \mu \overline{P}'_m \leqq \mu \overline{P}'$$

subsistent pour toutes les valeurs de m et, pour des valeurs indéfiniment croissantes de m, D_m et D'_m ont pour limites D et D'.

6. Si l'on change, dans un déterminant de la forme normale, l'une dans l'autre deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe; il est nul, si deux lignes ou deux colonnes sont identiques.

En effet, soient D' et D'_m ce que deviennent D et D_m en changeant l'une dans l'autre deux lignes quelconques; on peut toujours choisir m assez grand pour que ces lignes appartiennent toutes deux au déterminant D_m. On a donc

$$D_m = - D'_m.$$

Or, en fixant arbitrairement une quantité positive δ aussi petite qu'on veut, on peut trouver un entier n' tel que, pour $n > n'$,

$$|D - D_n| < \delta, \qquad |D' - D'_n| < \delta;$$

par conséquent on aura, en choisissant n suffisamment grand,

$$|D + D'| = |D - D_n + D' - D'_n| \leqq |D - D_n| + |D' - D'_n| < 2\delta,$$

ce qui conduit à l'égalité

$$D' = - D.$$

La seconde partie du théorème énoncé est une conséquence immédiate de cette égalité.

7. Le développement d'un déterminant de la forme normale peut être présenté sous beaucoup de formes différentes.

a) Partons de l'identité

$$\Delta_{2m+1} = \Delta_1 + (\Delta_2 - \Delta_1) + \ldots + (\Delta_{2m+1} - \Delta_{2m})$$

où

$$\Delta_{2r+1} = [A_{ik}]_{i,k=-r\ldots+r}, \qquad \Delta_{2r} = [A_{ik}]_{i,k=-(r-1)\ldots+r};$$

posons

$$A_{ik} = a_{ik}, \qquad A_{ii} = 1 + a_{ii};$$

$$\Delta_{2r+1} - \Delta_{2r} = \nabla_{2r+1}, \qquad \Delta_{2r} - \Delta_{2r-1} = \nabla_{2r}$$

$$\nabla_{2r+1} = \begin{vmatrix} a_{-r,-r} & A_{-r,-r+1} & \cdot\cdot & A_{-r,r} \\ A_{-r+1,-r} & A_{-r+1,-r+1} & \cdot\cdot & A_{-r+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ A_{r,-r} & A_{r,-r+1} & \cdot\cdot & A_{r,r} \end{vmatrix}$$

$$\nabla_{2r} = \begin{vmatrix} A_{-r+1,-r+1} & \cdot\cdot & A_{-r+1,r-1} & A_{-r+1,r} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ A_{r-1,-r+1} & \cdot\cdot & A_{r-1,r-1} & A_{r-1,r} \\ A_{r,-r+1} & \cdot\cdot & A_{r,r-1} & a_{r,r} \end{vmatrix}$$

et faisons croître m au delà de toute limite. Si D est la valeur du déterminant donné, on aura

$$\text{(a)} \qquad D = \nabla_1 + \nabla_2 + \ldots + \nabla_m + \ldots$$

La série du second membre est convergente, puisque Δ_{2m+1} et Δ_{2m} ont la même limite D (n° 3); elle est aussi *absolument* convergente, ce qu'on voit en la comparant à la série à termes positifs

$$\text{(a')} \qquad \overline{P} = \overline{\Pi}_1 + (\overline{\Pi}_2 - \overline{\Pi}_1) + \ldots + (\overline{\Pi}_m - \overline{\Pi}_{m-1}) + \ldots,$$

où

$$\overline{\Pi}_{2r+1} = \prod_{i=-r}^{+r}(1 + \sum_{k=-r}^{+r}|a_{ik}|); \qquad \overline{\Pi}_{2r} = \prod_{i=-r+1}^{+r}(1 + \sum_{k=-r+1}^{+r}|a_{ik}|)$$

et en remarquant que

(a″) $$|\Delta_m - \Delta_{m-1}| \leqq \overline{\Pi}_m - \overline{\Pi}_{m-1}.$$

b) Chaque expression $\overline{\Pi}_m - \overline{\Pi}_{m-1}$ peut s'écrire comme une somme de termes positifs dont aucun n'est plus petit que le terme correspondant du développement de ∇_m. Si donc on écrit, de la manière ordinaire, le déterminant ∇_m comme une somme de $\underline{|m} = M$ termes et qu'on remplace ensuite chacun de ces termes par sa valeur absolue, la série (a) restera encore convergente. En d'autres termes, si l'on a

$$\nabla_m = \sum_{k=1}^{M} \nabla_{mk},$$

la série double

(b) $$D = \Sigma_m \Sigma_k \nabla_{mk}$$

est absolument convergente.

c) On peut conclure de là que le déterminant D peut se mettre sous la forme

(c) $$D = \Sigma \pm \,..\, A_{-m,-m} \,..\, A_{0,0} \,..\, A_{m,m} \,..,$$

les termes indiqués par le signe Σ s'obtenant en permutant de toutes les manières possibles les premiers (ou seconds) indices du terme principal:

$$..\, A_{-m,-m} \,..\, A_{0,0} \,..\, A_{m,m} \,..$$

et en attribuant à chaque terme ainsi obtenu le signe $+$ ou le signe $-$ suivant la parité ou l'imparité du nombre des transpositions nécessaires pour passer du terme principal au terme considéré.

En effet, chaque terme du développement (c) n'est qu'une combinaison de certains termes du développement (b); ce dernier étant absolument convergent, l'expression du second membre de (c) aura une valeur déterminée et absolument indépendante de l'ordre des termes. Et comme, de plus, chaque terme du développement (b) se présente aussi dans le développement (c), l'égalité (c) se trouve démontrée.

d) Chaque terme du développement (c) contient comme facteur un élément et un seul d'une ligne ou d'une colonne quelconque. Par conséquent, le déterminant D peut s'écrire comme une expression linéaire et homogène des éléments d'une ligne ou d'une colonne quelconque. Si, par exemple, nous voulons le développer suivant les éléments de la ligne numérotée i, le coefficient de A_{ik} s'obtiendra en annullant, dans le déterminant D, tous les éléments de cette ligne excepté A_{ik}, qui doit être remplacé par l'unité. Désignons par

$$\operatorname{adj} A_{ik} = \frac{\partial D}{\partial A_{ik}} = \binom{i}{k} = \alpha_{ik}$$

le déterminant ainsi obtenu, de sorte qu'on ait

$$\text{(d)} \qquad D = \sum\nolimits_k A_{ik} \alpha_{ik}.$$

Les déterminants α_{ik}, auxquels nous donnerons le nom de ***mineurs*** ou ***sous-déterminants du premier ordre,*** satisfont d'ailleurs aux relations suivantes

$$\text{(d')} \qquad 0 = \sum\nolimits_k A_{jk} \alpha_{ik}, \qquad (j \gtrless i)$$

qui découlent immédiatement du théorème (6). Des considérations analogues conduiraient aux égalités

$$D = \sum\nolimits_i A_{ik} \alpha_{ik},$$
$$0 = \sum\nolimits_i A_{il} \alpha_{ik}. \qquad (l \gtrless k)$$

Il est clair que le mineur α_{ik} peut, outre de la manière déjà indiquée, s'obtenir aussi en supprimant dans D la ligne i et la colonne k, et en attribuant au déterminant résultant le signe $(-1)^{i-k}$. En effet, on n'a qu'à se rappeler que les deux modes de génération conduisent à des résultats identiques dans le cas des déterminants finis et à raisonner ensuite comme dans le n° 3.

e) Le déterminant D étant linéaire par rapport aux éléments de chacune de deux lignes quelconques i et m, si l'on veut le développer suivant ces éléments, le coefficient de $A_{ik} A_{mn}$ s'obtiendra en remplaçant les éléments A_{ik}, A_{mn} par l'unité et les autres éléments des lignes i et m

par zéro. Le déterminant ainsi obtenu s'appellera un *mineur du deuxième ordre* et sera désigné par l'une ou l'autre des notations

$$\operatorname{adj}\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{in} \\ A_{mk} & A_{mn} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 A}{\partial A_{ik}\partial A_{mn}} = \begin{pmatrix} i & m \\ k & n \end{pmatrix};$$

il est facile de voir qu'on a

$$\frac{\partial^2 D}{\partial A_{in}\partial A_{mk}} = -\frac{\partial^2 D}{\partial A_{ik}\partial A_{mn}} = \begin{pmatrix} i & m \\ n & k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} i & m \\ k & n \end{pmatrix},$$

d'où l'on conclut que

$$\text{(e)} \qquad D = \sum_{k<n}\!{}_{k}\sum\nolimits_{n} \begin{vmatrix} A_{ik} & A_{in} \\ A_{mk} & A_{mn} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} i & m \\ k & n \end{pmatrix}.$$

f) Plus généralement, si l'on désigne par

$$\operatorname{adj}\begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & \cdot\cdot & A_{i_1k_r} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ A_{i_rk_1} & \cdot\cdot & A_{i_rk_r} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix}$$

le déterminant obtenu en remplaçant dans D chacun des éléments $A_{i_1k_1} \cdot\cdot A_{i_rk_r}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $i_1 \cdot\cdot i_r$ ou des colonnes $k_1 \cdot\cdot k_r$ par zéro, on aura

$$\text{(f)} \qquad D = \sum_{k_1<k_2<\cdot\cdot<k_r}\!{}_{k_1}\sum\nolimits_{k_2}\cdot\cdot\sum\nolimits_{k_r} \begin{vmatrix} A_{i_1k_1} & \cdot\cdot & A_{i_1k_r} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ A_{i_rk_1} & \cdot\cdot & A_{i_rk_r} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix}.$$

Le déterminant

$$\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix}$$

sera nommé un *mineur* ou *sous-déterminant de l'ordre* r; on peut l'obtenir, comme il est facile de le voir, en supprimant dans D les lignes $i_1 \cdot\cdot i_r$ et les colonnes $k_1 \cdot\cdot k_r$ et en attribuant au résultat le signe

$$(-1)^{(i_1-k_1)+\cdot\cdot+(i_r-k_r)}.$$

En résumé, un déterminant D de la forme normale peut être développé suivant les déterminants formés par les éléments appartenant à une combinaison quelconque de lignes ou de colonnes. On voit facilement qu'il ne faut pas nécessairement que le nombre de ces lignes ou de ces colonnes soit fini. Le théorème de LAPLACE sur le développement des déterminants ordinaires peut donc être généralisé de manière à embrasser complètement le cas des déterminants infinis de la forme normale.

g) Il est clair que le déterminant D peut être développé suivant les éléments d'une ligne et d'une colonne quelconque. Prenons, par exemple, la ligne o et la colonne o. Le coefficient de A_{00} est α_{00} et celui de $A_{i0}A_{0k}$ est

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & k \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet d'écrire

$$\text{(g)} \qquad D = A_{00}\alpha_{00} - \sum_{i,k} A_{i0}A_{0k}\begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & k \end{pmatrix}. \qquad {\scriptstyle (i,k=\pm 1,\ldots \pm \infty)}$$

h) Enfin, on peut développer le déterminant D de manière à mettre en évidence les dimensions de ses termes successives par rapport aux quantités a_{ik}. En effet, on peut démontrer d'une manière absolument analogue à celle employée pour le cas des déterminants finis, que l'égalité suivante a lieu:

$$\text{(h)} \qquad D = 1 + \sum \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{vmatrix} + \sum \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} & a_{pr} \\ a_{qp} & a_{qq} & a_{qr} \\ a_{rp} & a_{rq} & a_{rr} \end{vmatrix} + \cdots,$$

les indices $p, q, r, \ldots$ parcourant tous les nombres entiers positifs et négatifs qui satisfont aux conditions

$$p < q < r < \ldots$$

8. De cette dernière formule ou de la formule (c) on peut tirer une conséquence importante. On voit en effet que la valeur de D n'est pas altérée par des déplacements quelconques entre les lignes et entre

les colonnes, pourvu toutefois que ces changements soient tels que les éléments diagonaux et les éléments non-diagonaux restent respectivement diagonaux et non-diagonaux.

Pour cette raison nous dirons que les déterminants de la forme normale sont *absolument* convergents.

9. Étant donné un déterminant D de la forme normale, si l'on remplace les éléments d'une ligne quelconque par des quantités μ_k dont les valeurs absolues n'excèdent pas un nombre positif donné, le nouveau déterminant D' jouira des mêmes propriétés que l'ancien et pourra, en particulier, être développé suivant les quantités μ_k.

Remplaçons, par exemple, les éléments de la ligne o par des quantités μ_k vérifiant l'inégalité

$$|\mu_k| < \mu,$$

et soient Δ'_m et ∇'_m ce que deviennent respectivement les déterminants Δ_m et ∇_m du n° 7. Soient de plus $\overline{P}'$ et $\overline{\Pi}'_m$ les produits obtenus en supprimant dans $\overline{P}$ et $\overline{\Pi}_m$ le facteur correspondant à la ligne o. Dans la série convergente

$$\overline{P} = \mu\overline{\Pi}'_1 + \sum_{m=2}^{\infty}\mu(\overline{\Pi}'_m - \overline{\Pi}'_{m-1}),$$

chaque terme $\mu(\overline{\Pi}'_m - \overline{\Pi}'_{m-1})$ est une somme de termes positifs dont aucun n'est plus petit que la valeur absolue du terme correspondant dans le développement du déterminant

$$\nabla'_m = \Delta'_m - \Delta'_{m-1} = \sum_{k=1}^{M}\nabla'_{mk},$$

d'où l'on conclut que la série double du second membre de l'égalité

$$D' = \Sigma_m \Sigma_k \nabla'_{mk}$$

converge absolument. On voit par là que la ligne o dans le déterminant D' joue le même rôle que toutes les autres lignes et que, par conséquent, les théorèmes des numéros précédents subsistent sans aucune altération pour les déterminants de la forme D'.

Un raisonnement analogue s'applique au cas où l'on remplace les éléments d'un nombre quelconque de lignes ou de colonnes par des quantités inférieures en valeur absolue à un nombre positif donné.

10. Dans un déterminant D de la forme normale, remplaçons les éléments d'une certaine ligne, par exemple la ligne o, par des séries finies ou infinies μ_k,

$$\mu_k = \Sigma_\lambda \mu_{k\lambda},$$

telles qu'on ait

$$\Sigma_\lambda |\mu_{k\lambda}| < \mu, \qquad {\scriptstyle (k=-\infty\,.+\infty)}$$

μ désignant un nombre positif donné. Le nouveau déterminant s'écrira ainsi:

$$\Sigma_k \alpha_{0k}\mu_k = \sum_{k,\lambda} \alpha_{0k}\mu_{k\lambda} = \Sigma_\lambda(\Sigma_k \alpha_{0k}\mu_{k\lambda}),$$

c'est-à-dire comme une somme d'un nombre fini ou infini de déterminants infinis.

11. Soit D un déterminant de la forme normale; soient c_λ une suite de quantités dont les valeurs absolues restent inférieures à un nombre donné. Si l'on suppose $c_0 = 0$ et qu'on remplace les éléments A_{0k} de la ligne o par les quantités

$$A'_{0k} = A_{0k} + \Sigma_\lambda c_\lambda A_{\lambda k},$$

le nouveau déterminant D' pourra être mis sous la forme

$$D' = \Sigma \alpha_{0k} A'_{0k} = D + \Sigma_\lambda c_\lambda \,.\, \Sigma_k \alpha_{0k} A_{\lambda k} = D$$

et ne différera pas, par conséquent, de D.

12. Soient deux déterminants de la forme normale:

$$A = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}, \qquad B = [B_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty};$$

si l'on définit des quantités C_{ik} par la formule

$$C_{ik} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} A_{ij} B_{kj},$$

le déterminant infini

$$C = [C_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

sera de la forme normale et l'on aura:

$$AB = C.$$

Posons, en effet,

$$A_{ik} = a_{ik}, \qquad B_{ik} = b_{ik}; \qquad (i \gtrless k)$$

$$A_{ii} = 1 + a_{ii}, \qquad B_{ii} = 1 + b_{ii};$$

par hypothèse, les séries

$$S_a = \Sigma_i \Sigma_k |a_{ik}|; \qquad S_b = \Sigma_i \Sigma_k |b_{ik}|$$

sont convergentes. Or, en posant

$$C_{ik} = c_{ik} \ (i \gtrless k), \qquad C_{ii} = 1 + c_{ii}$$

on a

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ki} + \Sigma_j a_{ij} b_{kj},$$
$$c_{ii} = a_{ii} + b_{ii} + \Sigma_j a_{ij} b_{ij}$$

ce qui, en vertu de la convergence des séries S_a, S_b et

$$S_{ab} = \Sigma_{i,k,j,} |a_{ij} b_{kj}|,$$

suffit pour démontrer la convergence de la série $\Sigma |c_{ik}|$. Par conséquent, le déterminant C est de la forme normale.

Pour mettre en évidence l'exactitude de l'égalite $AB = C$, il suffirait d'adopter un mode de démonstration analogue à celui employé dans la théorie ordinaire; mais il parait plus simple de procéder de la manière suivante.

Posons

$$\mu_{ik} = \sum_{j=-m}^{+m} A_{ij} B_{kj}, \qquad \nu_{ik} = C_{ik} - \mu_{ik};$$

$$A_m = [A_{ik}], \quad B_m = [B_{ik}], \quad C_m^m = [\mu_{ik}], \quad C_m = [C_{ik}] \quad (i,k=-m..+m)$$

$$A = A_m + \alpha_m, \qquad B = B_m + \beta_m, \qquad C = C_m + \gamma_m;$$

le déterminant C_m peut être exprimé de la manière suivante comme une somme de $2m+2$ déterminants:

$$C_m = (\mu_{0,-m} \cdot\cdot \mu_{0,m}) + (\mu_{0,-m} \cdot\cdot \mu_{0,m-1}\nu_{0m}) + (\mu_{0,-m} \cdot\cdot \mu_{0,m-2}\nu_{0,m-1}C_{0m}) + \cdot\cdot$$
$$\cdot\cdot + (\mu_{0,-m}\nu_{0,-m+1}C_{0,-m+2} \cdot\cdot C_{0m}) + (\nu_{0,-m}C_{0,-m+1} \cdot\cdot C_{0m}),$$

les lignes numérotées 0 des déterminants respectifs étant seules représentées. Or, dans chacun de ces déterminants, tous les mineurs correspondant aux éléments ν_{ik} sont, pour des valeurs quelconques de l'entier m, inférieurs en valeur absolue au produit

$$\overline{P} = \prod_{i=-\infty}^{+\infty}(1 + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_{ik}|).$$

Par conséquent, en remarquant que

$$C_m^m = (\mu_{0,-m} \cdot\cdot \mu_{0,m}),$$

on aura

$$|C_m - C_m^m| < \overline{P}\sum_{k=-m}^{+m}\sum_{r=-m}^{+m}|\nu_{kr}|;$$

mais, en choisissant m suffisamment grand, le second membre de cette inégalité deviendra aussi petit qu'on veut; c'est ce qui arrive, en effet, pour le second membre de l'inégalité

$$\sum_{k=-m}^{+m}\sum_{r=-m}^{+m}|\nu_{kr}| \leqq \sum_{j=m+1}^{\infty}\sum_{i,k\,-m}^{+m}\{|a_{ij}b_{kj}| + |a_{i,-j}b_{k,-j}|\}.$$

Donc, en se donnant une quantité positive quelconque δ, on peut déterminer l'entier m' de telle manière que, pour $m > m'$, les valeurs absolues

$$|A - A_m|, \qquad |B - B_m|, \qquad |C - C_m|, \qquad |C_m - C_m^m|$$

soient toutes plus petites que δ. Soit Q une quantité positive suffisamment grande; on aura

$$|AB - A_m B_m| = |A_m\beta_m + \alpha_m B_m + \alpha_m\beta_m| < \delta Q + \delta^2,$$
$$|C - C_m^m| < 2\delta,$$

ce qui, d'après le théorème de multiplication des déterminants finis:

$$A_m B_m = C_m^m,$$

conduit à écrire

$$|AB - C| < \delta(Q + \delta + 2)$$

ou enfin

$$AB = C.$$

13. Soit $D = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$ un déterminant infini de la forme normale; si l'on désigne par α_{ik} ses mineurs du premier ordre, on a

$$(\alpha) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 k_1} & \cdot\cdot & \alpha_{i_1 k_r} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot \\ \alpha_{i_r k_1} & \cdot\cdot & \alpha_{i_r k_r} \end{vmatrix} = D^{r-1}\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix},$$

$i_1 \,..\, i_r$; $k_1 \,..\, k_r$ désignant des entiers quelconques.

En partant du théorème de multiplication démontré dans le numéro précédent, la démonstration de ce théorème devient identique à celle de la théorie ordinaire [1] et pourra être omise. En revanche, nous allons établir quelques autres formules qui se rattachent à celle-là et dont nous aurons besoin dans la suite.

Rappelons d'abord que, $\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix}$ désignant toujours le mineur obtenu en remplaçant dans D les éléments $A_{i_1 k_1} \,..\, A_{i_r k_r}$ par l'unité et les autres éléments des lignes $i_1 \,..\, i_r$ ou des colonnes $k_1 \,..\, k_r$ par zéro, ce déterminant sera nul si deux i ou deux k sont égaux et changera de signe si deux i ou deux k se changent l'un dans l'autre.

Cela posé, formons la série double:

$$S = \sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r & m \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} A_{m\lambda};$$

cette série est absolument convergente, car les quantités

$$\sum_\lambda \left| \begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} A_{m\lambda} \right| \qquad (m = -\infty..+\infty)$$

[1] Voir p. ex. BALTZER, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 5[te] Aufl., p. 63.

sont toutes plus petites en valeur absolue qu'un certain nombre positif, et la série

$$\sum_m \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r & m \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r & k \end{pmatrix}$$

converge absolument puisqu'elle n'est autre chose que le développement du déterminant obtenu en remplaçant dans le déterminant $\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix}$ chaque élément de la colonne k par l'unité.

On a donc le droit d'écrire

$$S = \sum_m \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r & m \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r & k \end{pmatrix} \sum_\lambda \begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} A_{m\lambda}$$

$$= \sum_\lambda \begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} \sum_m \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r & m \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r & k \end{pmatrix} A_{m\lambda};$$

mais

$$(\beta) \qquad \sum_\lambda \begin{pmatrix} i \\ \lambda \end{pmatrix} A_{m\lambda} = \begin{cases} D, & \text{si } m = i \\ 0, & \text{si } m \gtrless i \end{cases}$$

et

$$(\gamma) \qquad \sum_m \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r & m \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r & k \end{pmatrix} A_{m\lambda}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix}, & \text{si } \lambda = k; \\ -\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix}, & \text{si } \lambda = k_\nu; \qquad (\nu = 1..r) \\ 0, & \text{si } \lambda \lessgtr k, k_1, \ldots, k_r. \end{cases}$$

On a donc d'une part

$$S = \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r & i \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r & k \end{pmatrix} . D,$$

d'autre part

$$S = \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix} - \sum_{\nu=1}^{r} \begin{pmatrix} i \\ k_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 & \cdot\cdot & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & \cdot\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\cdot & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & \cdot\cdot & k_r \end{pmatrix},$$

ce qui entraîne l'identité suivante:

$$(\delta)\quad \binom{i}{k}\binom{i_1 \,..\, i_r}{k_1 \,..\, k_r} = \sum_{\nu=1}^{r}\binom{i}{k_\nu}\binom{i_1 \,..\, i_{\nu-1}\; i_\nu\; i_{\nu+1} \,..\, i_r}{k_1 \,..\, k_{\nu-1}\; k\; k_{\nu+1} \,..\, k_r} + \binom{i_1 \,..\, i_r\; i}{k_1 \,..\, k_r\; k} D.$$

En particulier, si i est égal à l'un des indices $i_1 \,..\, i_r$, par exemple $i = i_1$, le déterminant $\binom{i_1 \,..\, i_r\; i}{k_1 \,..\, k_r\; k}$ s'évanouit et l'on a:

$$(\delta')\quad \binom{i_1}{k}\binom{i_1 \,..\, i_r}{k_1 \,..\, k_r} = \binom{i_1}{k_1}\binom{i_1\; i_2 \,..\, i_r}{k\; k_2 \,..\, k_r} + \,..\, + \binom{i_1}{k_r}\binom{i_1 \,..\, i_{r-1}\; i_r}{k_1 \,..\, k_{r-1}\; k}.$$

De plus, en remarquant que les colonnes peuvent être regardées comme des lignes et *vice-versâ*, on obtient l'identité

$$(\varepsilon)\quad \binom{i}{k}\binom{i_1 \,..\, i_r}{k_1 \,..\, k_r} = \sum_{\nu=1}^{r}\binom{i_\nu}{k}\binom{i_1 \,..\, i_{\nu-1}\; i\; i_{\nu+1} \,..\, i_r}{k_1 \,..\, k_{\nu-1}\; k_\nu\; k_{\nu+1} \,..\, k_r} + \binom{i_1 \,..\, i_r\; i}{k_1 \,..\, k_r\; k} D$$

qui, pour $k = k_1$, prend la forme

$$(\varepsilon')\quad \binom{i}{k_1}\binom{i_1 \,..\, i_r}{k_1 \,..\, k_r} = \binom{i_1}{k_1}\binom{i\; i_2 \,..\, i_r}{k_1\; k_2 \,..\, k_r} + \,..\, + \binom{i_r}{k_1}\binom{i_1 \,..\, i_{r-1}\; i}{k_1 \,..\, k_{r-1}\; k_r}.$$

14. Jusqu'ici nous n'avons étudié les propriétés des déterminants infinis que sous la supposition que ces déterminants fussent de la forme normale. Il est facile de voir qu'on peut ramener à ce cas une classe plus générale de déterminants infinis. Supposons, en effet, que les quantités A_{ik} satisfassent aux conditions suivantes: 1° le produit $\prod_i A_{ii}$ converge absolument; 2° il existe une suite de quantités x_k ($k = -\infty \,..\, +\infty$) telle que la série double

$$\sum_i \sum_k{}' A_{ik}\frac{x_i}{x_k} \qquad (i \gtrless k)$$

converge absolument. Je dis que le déterminant infini

$$D = [A_{ik}]_{i,k=-\infty\,..\,+\infty}$$

converge et jouit des mêmes propriétés qu'un déterminant de la forme normale.

En effet, posons

$$\bar{A}_{ik} = A_{ik}\frac{x_i}{x_k}$$

et formons le déterminant infini

$$\bar{D} = [\bar{A}_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty};$$

ce déterminant étant de la forme normale, on peut lui appliquer la formule (b) (n° 7); désignons par $\bar{\nabla}_m$ et $\bar{\nabla}_{mk}$ ce que deviennent ∇_m et ∇_{mk} en remplaçant les A_{ik} par les $\bar{A}_{ik}$; on aura

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \bar{\nabla}_1 + \bar{\nabla}_2 + \cdots + \bar{\nabla}_m + \cdots \\ &= \Sigma_m \Sigma_k \bar{\nabla}_{mk};\end{aligned}$$

or on voit aisément que

$$\bar{\nabla}_m = \nabla_m, \qquad \bar{\nabla}_{mk} = \nabla_{mk},$$

m et k désignant des entiers quelconques. Par conséquent, le déterminant D converge, a la même valeur que $\bar{D}$ et peut, de plus, être représenté par la formule suivante:

$$\begin{aligned}D &= \nabla_1 + \nabla_2 + \cdots + \nabla_m + \cdots \\ &= \Sigma_m \Sigma_k \nabla_{mk}.\end{aligned}$$

En prenant cette formule pour point de départ, on voit, tout à fait comme dans le cas des déterminants de la forme normale, que les théorèmes du n° 7 ainsi que ceux des n^{os} 8, 12 et 13 s'appliquent aussi au cas du déterminant D. Au contraire, le théorème du n° 9 subit la légère modification que voici.

Remplaçons dans le déterminant $\bar{D}$ les éléments de la ligne i:

$$\bar{A}_{ik} \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

par des quantités

$$\bar{\mu}_k = \mu_k\frac{x_i}{x_k} \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

dont les valeurs absolues sont inférieures à un nombre donné, et soit $\overline{D}'$ le nouveau déterminant; on pourra écrire

$$\overline{D}' = \sum_k \overline{\mu}_k \frac{\partial \overline{D}}{\partial \overline{A}_{ik}};$$

or, en vertu des remarques du n° 9, et d'après ce qui vient d'être démontré, il est clair que la valeur de $\overline{D}'$ ne change pas si l'on multiplie les éléments de chaque ligne i par $\frac{1}{x_i}$ et ceux de chaque colonne k par x_k; en d'autres termes, si l'on désigne par D' le déterminant obtenu en remplaçant dans D les éléments de la ligne i par les quantites μ_k, on aura

$$D' = \overline{D}' = \sum_k \mu_k \frac{\partial D}{\partial A_{ik}}.$$

Le théorème suivant se trouve donc démontré.

Soit un déterminant dont les éléments A_{ik} satisfont aux conditions énoncées plus haut; si l'on remplace les éléments d'une ligne i quelconque:

$$A_{ik} \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

par des quantités

$$\mu_k \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

telles que les valeurs absolues des quantités

$$\overline{\mu}_k = \mu_k \frac{x_i}{x_k} \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

n'excèdent pas toute limite, le nouveau déterminant convergera et pourra être développé suivant les quantités μ_k de la manière ordinaire.

Par exemple, s'il existe une quantité x telle que la série

$$\sum_i \sum_k' A_{ik} x^{i-k} \qquad (i \gtrless k)$$

converge absolument, on peut prendre

$$x_k = x^k \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

et, en remplaçant dans le déterminant D les éléments A_{ik} de la ligne i par les quantités $\mu_k = x^k$, on voit que le nouveau déterminant s'exprime comme une série ordonnée suivant les puissances de x, dont les coefficients sont les mineurs du premier ordre appartenant à ladite ligne.

15. Avant de terminer ce paragraphe, il convient de dire quelques mots sur les déterminants infinis dont les éléments sont des fonctions analytiques d'une variable indépendante ρ.

Soit

$$D(\rho) = [A_{ik}(\rho)]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

un déterminant infini où les $A_{ik}(\rho)$ sont de telles fonctions, et posons, comme plus haut,

$$D_m(\rho) = [A_{ik}(\rho)]_{i,k=-m..+m};$$

soit T un certain continuum dans le plan représentatif de la variable ρ en dedans et sur la limite duquel les fonctions A_{ik} sont finies et continues. Nous dirons que le déterminant D est *uniformément convergent* dans le domaine T si, après avoir fixé arbitrairement la quantité positive δ, on peut trouver un entier positif n' tel que l'on ait

$$|D_{n+p}(\rho) - D_n(\rho)| < \delta$$

dès que $n > n'$, pour des valeurs quelconques de l'entier positif p et pour toute valeur de ρ en dedans ou sur la limite de T.

Cela posé, si le déterminant D converge uniformément dans T, il représente dans ce domaine une branche uniforme d'une certaine fonction analytique.

En effet, la série du second membre de l'égalité

$$D = D_1 + (D_2 - D_1) + \ldots + (D_m - D_{m-1}) + \ldots$$

converge uniformément en dedans de T.

Supposons maintenant que les fonctions $A_{ik}(\rho)$ satisfassent à la condition suivante: si l'on pose $A_{ik}(\rho) = a_{ik}(\rho)$, $A_{ii}(\rho) = 1 + a_{ii}(\rho)$, la série double

$$\sum_i \sum_k |a_{ik}(\rho)|$$

converge uniformément dans T.[1] Il est clair d'abord que le déterminant D sera de la forme normale pour chaque point ρ de T. De plus, il est facile de voir qu'il convergera uniformément en dedans de ce domaine. En effet, le développement ((a), n° 7) est uniformément convergent puisque l'inégalité (a″) a lieu pour toute valeur de ρ appartenant à T et que le développement (a′) de $\bar{P}$ converge uniformément en dedans de ce domaine.

Mais le développement (a) n'est pas le seul dont la convergence est uniforme; cette propriété appartient à tous les autres développements du n° 7. Considérons d'abord la formule (d). Puisque tous les mineurs du déterminant $D(\rho)$ sont plus petits en valeur absolue qu'un certain nombre positif et que la série

$$\sum_k |A_{ik}(\rho)|$$

converge uniformément dans l'intérieur de T, il en sera de même de la série

$$\sum_k |A_{ik}(\rho)\alpha_{ik}(\rho)|$$

et par suite de

$$\sum_k A_{ik}(\rho)\alpha_{ik}(\rho) = D(\rho).$$

La même chose se démontre d'une manière analogue pour les développements (e), (f) et (g), et il ne reste qu'à examiner la formule (h). Ecrivons cette formule ainsi qu'il suit:

$$D = 1 + S'' + S''' + \ldots + S^{(m)} + \ldots \tag{h}$$

[1] Une série double $\sum_0^{+\infty}{}_\mu \sum_0^{+\infty}{}_\nu \varphi_{\mu\nu}$ où les $\varphi_{\mu\nu}$ sont des fonctions finies et continues d'un nombre quelconque de variables, laquelle converge pour chaque point d'un certain domaine T, sera dite *uniformément* convergente dans ce domaine, si à chaque quantité positive δ correspondent deux entiers m', n', tels que l'on ait

$$\left| \sum_m^{\infty}{}_\mu \sum_n^{\infty}{}_\nu \varphi_{\mu\nu} \right| < \delta$$

dès que $m > m'$, $n > n'$ et pour chaque point en dedans ou sur la limite de T. De même, pour le cas des séries d'ordre de multiplicité 3, 4, etc. nous adopterons des définitions analogues.

où

$$S'' = \sum_{p,q} \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{vmatrix}, \qquad S''' = \sum_{p,q,r} \begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} & a_{pr} \\ a_{qp} & a_{qq} & a_{qr} \\ a_{rp} & a_{rq} & a_{rr} \end{vmatrix}, \ldots;$$

posons, pour un moment,

$$u_i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_{ik}| \qquad (i=-\infty..+\infty)$$

et développons le produit $\overline{P} = \Pi_i(1 + u_i)$ de la manière suivante:

$$(\overline{\mathrm{h}}) \qquad \overline{P} = 1 + \Sigma' + \Sigma'' + \Sigma''' + \ldots + \Sigma^{(m)} + \ldots$$

où

$$\Sigma' = \Sigma_p u_p, \qquad \Sigma'' = \sum_{p,q} u_p u_q, \qquad \Sigma''' = \sum_{p,q,r} u_p u_q u_r, \ldots;$$

il est clair d'abord que

$$|S''| \leqq \Sigma'', \qquad |S'''| \leqq \Sigma''', \quad \ldots \quad |S^{(m)}| \leqq \Sigma^{(m)}, \ldots$$

et que, par conséquent, il suffit pour notre but de démontrer que la série $(\overline{\mathrm{h}})$ converge uniformément. Si, à cet effet, nous écrivons $\overline{P}$ sous la forme

$$(\overline{\overline{\mathrm{h}}}) \qquad \overline{P} = p_1 + (p_2 - p_1) + \ldots + (p_m - p_{m-1}) + \ldots$$

où

$$p_{2r+1} = \prod_{i=-r}^{+r}(1 + u_i), \qquad p_{2r} = \prod_{i=-r+1}^{+r}(1 + u_i),$$

nous savons que la série $\Sigma_m(p_m - p_{m-1})$ converge uniformément en dedans de T. Donc, à chaque quantité positive δ correspond un entier n' tel que l'on ait

$$\sum_{m=n}^{\infty}(p_m - p_{m-1}) < \delta$$

dès que $n > n'$ et pour toute valeur de ρ en dedans de T. Or l'expression $p_m - p_{m-1}$ se compose de termes positifs formés en multipliant certaines des quantités u_i, le degré de ces termes par rapport aux u_i étant au plus égal à m. Donc tous les termes de l'expression

$$\sum_{m=n}^{\infty} \Sigma^{(m)},$$

c'est-à-dire tous les termes de $\bar{P}$ dont le degré par rapport aux u_i excède $n - 1$, se trouvent aussi dans la somme

$$\sum_{m=n}^{\infty} (p_m - p_{m-1}),$$

d'où l'on voit que

$$\sum_{m=n}^{\infty} \Sigma^{(m)} < \delta;$$

donc la série $(\bar{\mathrm{h}})$ et *a fortiori* la série (h) convergent uniformément à l'intérieur de T.

Mais il y a plus: toutes les séries $S^{(m)}$ qui composent la série (h) convergent aussi uniformément en dedans de T. Pour le voir, démontrons d'abord que chaque série $\Sigma^{(m)}$ converge uniformément. La série

$$\Sigma^{(m)} = \Sigma_{\mu_1} \Sigma_{\mu_2} \ldots \Sigma_{\mu_m} u_{\mu_1} u_{\mu_2} \ldots u_{\mu_m}$$

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_m$$

s'obtient en remplaçant certains termes de

$$\Sigma_{\mu_1} \Sigma_{\mu_2} \ldots \Sigma_{\mu_m} u_{\mu_1} u_{\mu_2} \ldots u_{\mu_m}$$

par zéro; cette dernière série qui n'est autre chose que le produit

$$\Sigma_{\mu_1} u_{\mu_1} \,.\, \Sigma_{\mu_2} u_{\mu_2} \ldots \Sigma_{\mu_m} u_{\mu_m},$$

est évidemment uniformément convergente puisque la série $\Sigma_i u_i$ converge uniformément; il en est donc de même de $\Sigma^{(m)}$. Or on a

$$\text{valeur absolue de } \begin{vmatrix} a_{\mu_1\mu_1} & \ldots & a_{\mu_1\mu_m} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ a_{\mu_m\mu_1} & \ldots & a_{\mu_m\mu_m} \end{vmatrix} \leq u_{\mu_1} u_{\mu_2} \ldots u_{\mu_m};$$

donc la série $S^{(m)}$ est uniformément convergente en dedans de T.

16. Supposons, comme dans le numéro précédent, que les fonctions A_{ik} soient telles que la série double $\sum_i \sum_k |a_{ik}(\rho)|$ converge uniformément en dedans de T. Soient μ_k une suite de constantes ou de fonctions qui sont toutes, pour chaque point ρ de T, inférieures en valeur absolue à un nombre donné. Si l'on remplace dans D les éléments A_{ik} d'une ligne i quelconque par ces quantités μ_k, on sait d'après le n° 9 que le déterminant nouveau converge dans ce domaine et peut être représenté par la série

$$\sum_k \mu_k \alpha_{ik};$$

démontrons que cette série converge *uniformément* en dedans de T. Puisque le mineur α_{ik} s'obtient en remplaçant dans D l'élément A_{ik} par l'unité et les autres éléments de la colonne k par zéro, il est clair que dans ce déterminant l'élément diagonal de la ligne k est nul et que, par conséquent, on a, d'après le n° 5,

$$|\alpha_{ik}| \leqq \overline{P} \,.\, \sum_\lambda |a_{k\lambda}|$$

pour tout point ρ du domaine T. Or la série $\sum_k \sum_\lambda |a_{k\lambda}|$ étant uniformément convergente dans ce domaine, il en sera de même de $\sum_k |\alpha_{ik}|$; donc la série $\sum_k \mu_k \alpha_{ik}$ est *a fortiori* uniformément convergente en dedans de T.

17. Supposons maintenant qu'il existe une suite de quantités x_k qui rendent la série double

$$\sum_i \sum_k \left| a_{ik}(\rho) \frac{x_i}{x_k} \right|$$

uniformément convergente en dedans de T. Dans ce cas, le déterminant

$$D = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

appartient à la classe étudiée dans le n° 14; tous les développements en série dont il a été question dans le n° 7 sont donc valables à l'intérieur de T et il est facile de voir, d'après les n^{os} 14 et 15, que ces développements convergent uniformément en dedans de ce domaine.

18. Si l'on remplace dans D les éléments d'une ligne i quelconque par des quantités μ_k telles que les valeurs absolues $\left|\mu_k \frac{x_i}{x_k}\right|$ $(k = -\infty .. +\infty)$

sont toutes plus petites qu'un nombre donné, on sait (n° 14) que le déterminant ainsi obtenu est représenté par la série $\sum \mu_k \alpha_{ik}$ et que cette série converge pour chaque point ρ de T. Comme dans le n° 16, on démontre aisément que cette série converge *uniformément* en dedans de T.

19. Revenons au cas où la série $\sum_i \sum_k |a_{ik}|$ converge uniformément dans T et proposons-nous de former la *dérivée* du déterminant D. Il est clair d'abord que la série double

$$S = \sum_i \sum_k \alpha_{ik} \frac{dA_{ik}}{d\rho}$$

est absolument et uniformément convergente à l'intérieur de T; en effet, puisque ces propriétés appartiennent à $\sum_i \sum_k a_{ik}$, elles appartiendront aussi à $\sum_i \sum_k \frac{da_{ik}}{d\rho}$; et les α_{ik} sont, pour toutes valeurs de ρ en dedans ou sur la limite de T, inférieurs en valeur absolue à un certain nombre positif.

Ceci posé, je dis qu'à l'intérieur de T la série S représente la dérivée de D. En effet, en conservant les mêmes notations qu'auparavant, on peut exprimer D par la série

$$D = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (D_m - D_{m-1}),$$

qui converge uniformément dans T; il suit de là qu'on peut écrire

$$\frac{dD}{d\rho} = \frac{dD_0}{d\rho} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{dD_m}{d\rho} - \frac{dD_{m-1}}{d\rho} \right)$$

et que la série du second membre de cette égalité converge uniformément. Donc, en choisissant arbitrairement une quantité positive δ, on peut déterminer n' de telle manière que

$$\left| \frac{dD}{d\rho} - \frac{dD_n}{d\rho} \right| < \delta,$$

dès que $n > n'$ et pour toutes valeurs de ρ en dedans ou sur la limite de T.

D'un autre côté, en désignant par $\alpha_{ik}^{(n)}$ les mineurs du premier ordre du déterminant D_n, on a

$$\frac{dD_n}{d\rho} = \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{k=-n}^{+n} \alpha_{ik}^{(n)} \frac{dA_{ik}}{d\rho}.$$

Posons

$$S_n = \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{k=-n}^{+n} \alpha_{ik} \frac{dA_{ik}}{d\rho}, \qquad S = S_n + E_n;$$

puisque S converge uniformément, on peut déterminer n'' de sorte que l'inégalité $n > n''$ entraîne celle-ci:

$$| S - S_n | < \delta$$

pour toute valeur ρ de T.

Or on a

$$\frac{dD_n}{d\rho} - S_n = \sum_{i=-n}^{+n} \sum_{k=-n}^{+n} (\alpha_{ik}^{(n)} - \alpha_{ik}) \frac{dA_{ik}}{d\rho}$$

et l'on peut trouver une quantité μ telle que les inégalités

$$| \alpha_{ik} - \alpha_{ik}^{(n)} | \leqq \mu(\overline{P} - \overline{P}_n)$$

aient lieu partout à l'intérieur de T. Donc il existe un entier n''' tel qu'on ait

$$\left| \frac{dD_n}{d\rho} - S_n \right| < \delta$$

pour $n > n'''$ et dès que ρ se trouve en dedans ou sur la limite de T. Par suite on a

$$\left| \frac{dD}{d\rho} - S \right| < 3\delta$$

ou enfin, pour tout le domaine T,

$$\frac{dD}{d\rho} = \sum_i \sum_k \alpha_{ik} \frac{dA_{ik}}{d\rho};$$

en introduisant une notation employée plus haut, cette égalité prend la forme

$$\frac{dD}{d\rho} = \sum_i \sum_k \frac{\partial D}{\partial A_{ik}} \frac{dA_{ik}}{d\rho},$$

généralisation d'une formule bien connue de la théorie des déterminants finis.

§ 2. *Sur la résolution des systèmes infinis d'équations linéaires.*

20. Posons

$$u_i = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik} x_k \qquad (i=-\infty..+\infty)$$

et supposons que le déterminant

$$D = [A_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

soit de la forme normale. Proposons-nous de trouver toutes les valeurs des inconnus x_k $(k = -\infty \,..\, +\infty)$ qui satisfont aux égalités

$$(1) \qquad u_i = 0 \qquad (i=-\infty.+\infty)$$

et qui ont, de plus, la propriété de ne pas dépasser en valeur absolue chaque nombre fini:

$$(1') \qquad |x_k| \leqq X. \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

Supposons d'abord $D \neq 0$. Pour toutes les valeurs des x_k qui satisfont à (1′), on a

$$(2) \qquad \sum_k |A_{ik}|\,|x_k| < U, \qquad (i=-\infty..+\infty)$$

U désignant un nombre positif fini. Donc la série

$$S = \sum_i \sum_\lambda \binom{i}{k} A_{i\lambda} x_\lambda$$

converge absolument et l'on peut écrire

$$S = \sum_i \binom{i}{k} u_i = \sum_\lambda x_\lambda \cdot \sum_i \binom{i}{k} A_{i\lambda},$$

d'où:

$$(3) \qquad x_k \,.\, D = \sum_i \binom{i}{k} u_i = 0,$$

c'est-à-dire

$$x_k = 0; \qquad (k=-\infty..+\infty)$$

en d'autres termes, le système (1, 1') n'a aucune solution. Donc:

Pour que le système (1, 1') *ait une solution, il faut que le déterminant D soit égal à zéro.*

Supposons $D = 0$. Avant d'examiner ce cas de plus près, il faut établir quelques propositions préliminaires.

Formons le mineur $\begin{pmatrix} -m \, .. + m \\ -m \, .. + m \end{pmatrix}$ et désignons par $(-m \, .. + m)$ le produit obtenu en supprimant dans le produit

$$\overline{P} = \Pi_i(1 + \Sigma |a_{ik}|)$$

les facteurs qui correspondent à $i = -m \, .. + m$. Dans le développement du déterminant $\begin{pmatrix} -m \, .. + m \\ -m \, .. + m \end{pmatrix}$ de même que du produit $(-m \, .. + m)$ se trouve le terme $+1$, et aucun terme du développement de celui-là n'est plus grand en valeur absolue que le terme correspondant du développement de celui-ci. Donc on a:

$$\left| \begin{pmatrix} -m \, .. + m \\ -m \, .. + m \end{pmatrix} - 1 \right| \leqq (-m \, .. + m) - 1. \tag{4}$$

Choisissons arbitrairement une quantité positive δ plus petite que l'unité; il existe un entier positif m' tel que, pour $m \geqq m'$, le second membre de (4) est plus petit que δ. Pour de telles valeurs de m on aura par conséquent

$$1 - \delta < \left| \begin{pmatrix} -m \, .. + m \\ -m \, .. + m \end{pmatrix} \right| < 1 + \delta; \tag{5}$$

donc le mineur $\begin{pmatrix} -m' \, .. + m' \\ -m' \, .. + m' \end{pmatrix}$ est certainement différent de zéro et il existe dans la suite

$$\begin{pmatrix} -m \, .. + m \\ -m \, .. + m \end{pmatrix} \qquad (m=0,1,2,..)$$

un *premier* mineur qui n'est pas nul.

Il est donc possible de déterminer les indices $i_1 \ldots i_r$; $k_1 \ldots k_r$ en façon que le mineur $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$ ne soit pas nul; de plus, si $r > 1$, nous supposerons que ces indices soient choisis de manière que les mineurs $\begin{pmatrix} \iota_1 & \ldots & \iota_\nu \\ \varkappa_1 & \ldots & \varkappa_\nu \end{pmatrix}$ d'ordre inférieur à r et formés en prenant pour $\iota_1 \ldots \iota_\nu$ et $\varkappa_1 \ldots \varkappa_\nu$ respectivement toutes les combinaisons possibles des nombres $i_1 \ldots i_r$ et $k_1 \ldots k_r$, soient tous égaux à zéro.

Cela posé, si $r > 1$, *tous* les mineurs de D d'ordre 1 sont nuls. En effet, puisque D est nul, l'identité ((δ), n° 13) prend la forme

$$\binom{i}{k}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{r} \binom{i}{k_\nu}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & k & k_{\nu+1} & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

d'où l'on voit que les mineurs suivants:

$$\binom{i}{k} = 0 \qquad (i = i_1 \ldots i_r;\ k = -\infty \ldots +\infty)$$

et, par suite, le second membre de l'égalité ((ε), n° 13):

$$\binom{i}{k}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix} = \sum_{\nu=1}^{r} \binom{i_\nu}{k}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & i & i_{\nu+1} & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

s'évanouissent pour $i, k = -\infty \ldots +\infty$; donc on a

$$\binom{i}{k} = 0. \qquad (i, k = -\infty \ldots +\infty)$$

Des raisonnements analogues suffisent pour démontrer qu'aussi les mineurs d'ordre $2, 3, \ldots r-1$ sont *tous* nuls.

Appliquons ces résultats aux problème que nous avons en vue et considérons le cas général où l'ordre r du mineur $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$ est quelconque. D'abord on voit facilement que les équations

$$u_{i_1} = 0, \qquad u_{i_2} = 0, \quad \ldots \quad u_{i_r} = 0$$

sont superflues, c'est-à-dire qu'elles sont une conséquence des autres équations $u_i = 0$ du système considéré. Soit en effet i_ν l'un des indices $i_1 \ldots i_r$; puisque la série double

$$\sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & \ldots & k_r \end{pmatrix} A_{m\lambda} x_\lambda$$

est absolument convergente, on a:

$$\sum_m \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & \ldots & k_r \end{pmatrix} u_m = \sum_\lambda x_\lambda \cdot \sum_m \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & \ldots & k_r \end{pmatrix} A_{m\lambda};$$

or la série

$$\sum_m \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & \ldots & k_r \end{pmatrix} A_{m\lambda}$$

est identiquement nulle si $\lambda \gtrless k_1, k_2, \ldots k_r$; elle est nulle aussi si λ est égal à l'un des nombres $k_1, k_2, \ldots k_r$ puisqu'elle représente, dans ce cas, un certain mineur d'ordre $r - 1$. Donc:

$$\sum_m \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & m & i_{\nu+1} & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & k_\nu & k_{\nu+1} & \ldots & k_r \end{pmatrix} u_m = 0;$$

dans cette égalité le coefficient de u_{i_ν} n'est pas nul, mais les coefficients des quantités $u_{i_1} \ldots u_{i_{\nu-1}} u_{i_{\nu+1}} \ldots u_{i_r}$ sont tous nuls. Donc chaque égalité $u_{i_\nu} = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots r)$ sera satisfaite si les inconnus remplissent celles des équations $u_i = 0$ où l'indice $i \gtrless i_1, i_2, \ldots i_r$.

La série double

$$S = \sum_m \sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r & m \\ k_1 & \ldots & k_r & k \end{pmatrix} A_{m\lambda} x_\lambda$$

est absolument convergente et, si les inconnus x_k satisfont aux équations $u_i = 0$, on a $S = 0$; de là et en vertu des identités ((γ), n° 13) on conclut que les relations suivantes doivent avoir lieu entre les inconnus:

$$(6) \qquad \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ k & k_2 & \ldots & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \ldots + \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} & k \end{pmatrix} x_{k_r}. \quad (k = -\infty \ldots +\infty)$$

Ces relations qui sont nécessaires sont d'ailleurs suffisantes puisque toutes les séries

$$\sum_k \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ k & k_2 & \dots & k_r \end{pmatrix} A_{mk}, \quad \dots \quad \sum_k \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \dots & k_{r-1} & k \end{pmatrix} A_{mk} \qquad (m=-\infty \dots +\infty)$$

sont nulles. Donc:

Soit D un déterminant infini de la forme normale; après un certain rang m' qu'on peut toujours déterminer, tous les mineurs dans la suite

$$\begin{pmatrix} -m & \dots & +m \\ -m & \dots & +m \end{pmatrix} \qquad (m=0,1,2,\dots)$$

sont différents de zéro et l'on peut, par conséquent, toujours trouver un mineur d'ordre fini qui n'est pas nul; si D est nul, si $\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ k_1 & \dots & k_r \end{pmatrix}$ est différent de zéro et si, de plus, les indices $i_1 \dots i_r$; $k_1 \dots k_r$ sont tels que les mineurs $\begin{pmatrix} \iota_1 & \dots & \iota_\nu \\ x_1 & \dots & x_\nu \end{pmatrix}$ d'ordre $\nu = 1, 2, \dots r-1$, formés en prenant pour $\iota_1 \dots \iota_\nu$ et $x_1 \dots x_\nu$ respectivement toutes les combinaisons possibles des nombres $i_1 \dots i_r$ et $k_1 \dots k_r$, sont égaux à zéro, tous les mineurs d'ordre $1, 2, \dots r-1$ sont nuls.

Soit (1) *un système infini d'équations linéaires dont le déterminant D est de la forme normale et a la valeur nulle, et déterminons les nombres $r, i_1 \dots i_r, k_1 \dots k_r$ de ladite manière; si l'on assujettit les inconnus à la condition de ne pas dépasser en valeur absolue toute limite finie, les équations $u_{i_1} = 0, u_{i_2} = 0, \dots u_{i_r} = 0$ seront superflues, les inconnus $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots x_{k_r}$ resteront indéterminés et les autres x_k se présenteront nécessairement par la formule* (6) *comme des fonctions linéaires homogènes de $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots x_{k_r}$.*

Pour le cas d'un système infini d'équations linéaires non-homogènes:

$$u_i = c_i \qquad (i=-\infty \dots +\infty)$$

où les quantités c_i sont plus petites en valeur absolue qu'un nombre donné, on pourrait, par des considérations analogues, facilement établir un théorème correspondant.

II.

§ 3. *Sur les intégrales des équations différentielles linéaires.*

21. Considérons une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n

$$P(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + P_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n(x) y = 0 \tag{1}$$

où les coefficients $P_2(x)$, $P_3(x)$, .. $P_n(x)$ sont des fonctions holomorphes à l'intérieur d'un certain anneau circulaire dont le centre coincide avec l'origine du plan des x et dont les rayons R et R' satisfont aux inégalités

$$R < 1 < R'. \tag{2}$$

Représentons les fonctions $P_r(x)$ à l'intérieur de l'anneau (RR') par des séries de Laurent:

$$P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_{r\lambda} x^\lambda; \qquad (r=2,3,..n) \tag{3}$$

nous avons vu, dans la note citée plus haut, que, pour qu'une série de la forme

$$y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_\lambda x^{\rho+\lambda}$$

représente une intégrale de l'équation (1), il faut que ρ et g_λ satisfassent aux équations en nombre infini:

$$G_m(\rho) = \varphi(\rho + m) g_m + \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}{}' A_{m\lambda} g_\lambda = 0 \qquad (\lambda \gtrless m;\ m=-\infty..+\infty) \tag{4}$$

où

$$\varphi(\rho) = \rho(\rho-1)..(\rho-n+1) + \rho(\rho-1)..(\rho-n+3)\alpha_{2,-2} + .. + \alpha_{n,-n}$$

$$A_{m\lambda} = (\rho+\lambda)(\rho+\lambda-1)..(\rho+\lambda-n+3)\alpha_{2,m-\lambda-2} + .. + \alpha_{n,m-\lambda-n};$$

et, en étudiant les propriétés du déterminant infini

(5) $$\Omega(\rho) = [\varphi'_{ik}]_{i,k=-\infty\ldots+\infty}$$

où

$$\varphi'_{ik}(\rho) = \frac{A_{ik}}{\varphi(\rho+i)}, \qquad \varphi'_{ii}(\rho) = 1,$$

nous sommes parvenus à former un système fondamental d'intégrales de l'équation considérée. Toutefois, comme nous l'avons déjà fait remarquer, cette solution ne s'est présentée que sous certaines restrictions. Pour nous affranchir complètement de ces restrictions, qui provenaient principalement de ce que les exposants des intégrales peuvent être, dans certains cas, des points singuliers pour la fonction $\Omega(\rho)$, il convient d'introduire un nouveau déterminant $D(\rho)$ qui se comporte régulièrement pour toute valeur finie de la variable ρ.

Désignons par $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ les racines de l'équation

(6) $$\varphi(\rho) = 0$$

de sorte qu'on ait

$$\varphi(\rho) = (\rho-\rho_1)(\rho-\rho_2)\ldots(\rho-\rho_n);$$

posons

$$h_0(\rho) = 1; \qquad h_m(\rho) = \frac{1}{m^n} e^{-\frac{\rho-\rho_1}{m}} . e^{-\frac{\rho-\rho_2}{m}} \ldots e^{-\frac{\rho-\rho_n}{m}}$$

et multiplions les équations $G_m(\rho) = 0$ par les facteurs respectifs $h_m(\rho)$; le système nouveau:

(7) $$h_m(\rho)\, G_m(\rho) = 0, \qquad (m=-\infty\ldots+\infty)$$

qui est évidemment équivalent à l'ancien puisque les $h_m(\rho)$ ne deviennent ni nuls ni infinis en dedans d'un domaine fini quelconque, prend, en posant

$$h_m(\rho)\, A_{m\lambda} = \chi_{m\lambda}(\rho), \qquad h_m(\rho)\varphi(\rho+m) = \chi_{mm}(\rho),$$

la forme

(7') $$\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \chi_{m\lambda}(\rho) g_\lambda = 0. \qquad (m=-\infty\ldots+\infty)$$

Le déterminant de ce système infini:

(8) $$D(\rho) = [\chi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

est de la forme normale à l'intérieur de tout domaine fini; en effet, si l'on pose

$$h'_m(\rho) = m^n h_m(\rho)$$

de sorte que

$$\chi_{m\lambda} = \frac{A_{m\lambda}}{m^n} h'_m(\rho), \qquad \chi_{0\lambda} = A_{0\lambda}$$

et qu'on assujettisse la variable $\rho = u + iv$ à la condition de rester en dedans d'un domaine fini T, il existe un nombre positif h plus grand que les valeurs que prennent les fonctions $|h'_m(\rho)|$ en dedans de ce domaine; on peut donc écrire

$$|\chi_{m\lambda}| < h \left|\frac{A_{m\lambda}}{m^n}\right|; \qquad {\scriptstyle (m \gtrless 0)}$$

or, en se servant du même mode de démonstration que précédemment (Sur une application des déterminants infinis etc. p. 56) il est facile d'établir que la série double

$$\sum_m \sum_\lambda{}' \left|\frac{A_{m\lambda}}{m^n}\right| \qquad {\scriptstyle (m \gtrless 0;\ \lambda \gtrless m)}$$

converge et converge *uniformément* en dedans de T; la même chose ayant lieu pour la série $\Sigma_\lambda |A_{0\lambda}|$, il en sera de même de

$$\Sigma_m \Sigma_\lambda' |\chi_{m\lambda}|. \qquad {\scriptstyle (\lambda \gtrless m)}$$

De plus, puisqu'on a

$$\chi_{mm}(\rho) = \left(1 + \frac{\rho - \rho_1}{m}\right) e^{-\frac{\rho-\rho_1}{m}} \cdot\cdot \left(1 + \frac{\rho - \rho_n}{m}\right) e^{-\frac{\rho-\rho_n}{m}},$$

il est clair que la série

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\chi_{mm}(\rho) - 1|$$

converge uniformément à l'intérieur de T. Donc le déterminant $D(\rho)$ est de la forme normale, converge uniformément en dedans de tout domaine fini et représente, par conséquent, une fonction *entière* de ρ (voir § 1, n° 15).

Pour trouver la relation qui lie les déterminants $D(\rho)$ et $\Omega(\rho)$, formons le produit

$$\Omega(\rho) \cdot \prod_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_{mm}(\rho);$$

puisque le second facteur est un produit absolument convergent, le résultat de la multiplication s'obtiendra en multipliant — pour chaque indice m — les éléments de la ligne m par le facteur $\chi_{mm}(\rho)$. On aura donc

$$\Omega(\rho) \prod_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_{mm}(\rho) = [\chi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty} = D(\rho) \tag{9}$$

ou, en posant

$$\prod_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_{mm}(\rho) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\rho-\rho_\nu)\pi}{\pi} = \Pi(\rho), \tag{10}$$

$$D(\rho) = \Pi(\rho)\Omega(\rho). \tag{11}$$

Dans la note citée, nous avons dit, sans insister sur la démonstration, que la fonction $\Omega(\rho)$ est périodique et de période 1; il est facile maintenant d'en donner la preuve rigoureuse. En effet, puisqu'on a

$$\psi_{i,k}(\rho+1) = \psi_{i+1,k+1}(\rho),$$

si l'on remplace dans l'égalité

$$\Omega(\rho) = [\psi_{ik}]_{i,k=-\infty..+\infty}$$

ρ par $\rho+1$, on aura

$$\Omega(\rho+1) = [\psi_{i+1,k+1}(\rho)]_{i,k=-\infty..+\infty};$$

dans cette égalité, le second membre est le déterminant obtenu en choisissant l'élément $\psi_{11}(\rho)$ pour origine dans la table des éléments $\psi_{ik}(\rho)$; ce déterminant ayant la même valeur que celui qu'on obtient en choisissant $\psi_{00}(\rho)$ pour origine (voir § 1, n° 3), on aura

$$\Omega(\rho+1) = \Omega(\rho). \tag{12}$$

Donc, la fonction $\Omega(\rho)$ étant périodique de période 1, on voit par la formule (11) que l'on a

$$D(\rho + 1) = (-1)^n D(\rho), \qquad D(\rho + 2) = D(\rho) \tag{13}$$

et que, par conséquent, $D(\rho)$ est périodique et de période 1 ou de période 2 suivant la parité ou l'imparité de l'entier n.

Puisqu'on a

$$\lim_{\nu=\pm\infty} \Omega(\rho) = 1 \tag{14}$$

il faut, en comptant un pôle ou un zéro autant de fois qu'indique son ordre de multiplicité, que le nombre des pôles incongruents[1] de $\Omega(\rho)$ soit égal au nombre des zéros incongruents; donc le nombre des zéros incongruents de $D(\rho)$ est égal à n. En désignant un système de zéros incongruents de cette fonction par $\rho', \rho'', \ldots \rho^{(n)}$, on pourra écrire

$$D(\rho) = C \cdot \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\rho - \rho^{(\nu)})\pi}{\pi};$$

pour déterminer la constante C, remarquons que les égalités (10), (11), (14) nous donnent

$$Ce^{\pm \pi i (\Sigma\rho^{(\nu)} - \Sigma\rho_\nu)} = 1,$$

ce qui montre que la différence $\Sigma\rho^{(\nu)} - \Sigma\rho_\nu$ est nécessairement un nombre entier; en choisissant le système $\rho', \rho'', \ldots \rho^{(n)}$ de manière à donner à cet entier la valeur nulle, C prend la valeur 1 et l'on a

$$D(\rho) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\rho - \rho^{(\nu)})\pi}{\pi}. \tag{15}$$

[1] Dans ce qui suit, nous dirons que deux quantités complexes quelconques A et B sont *incongruentes* si leur différence n'est ni nulle ni égale à un nombre entier; dans le cas contraire, A et B seront dites *congruentes*.

De plus, puisque le coefficient de ρ^{n-1} dans $\varphi(\rho)$ est égal à $-\frac{1}{2}n(n-1)$, la valeur de $\sum \rho_\nu$ et par suite aussi de $\sum \rho^{(\nu)}$, est un nombre entier:

$$\sum \rho^{(\nu)} = \sum \rho_\nu = \frac{1}{2}n(n-1). \tag{16}$$

22. Soit maintenant x un point quelconque à l'intérieur de l'anneau circulaire (RR') et posons

$$\bar{\chi}_{m\lambda} = \chi_{m\lambda} x^{m-\lambda};$$

il est facile de voir que la série $\sum_m \sum'_\lambda |\bar{\chi}_{m\lambda}|$ convergera uniformément par rapport à ρ en dedans de tout domaine fini (cf. loc. cit. p. 61) et que, par suite, les théorèmes des n^os 17, 18 sont applicables au cas qui nous occupe. En particulier, nous pouvons dire que:

si, dans le déterminant $D(\rho)$ ou dans un de ses mineurs, on remplace les éléments d'une ligne quelconque par les puissances x^k, le déterminant ainsi obtenu pourra s'écrire comme une série ordonnée selon ces puissances; et cette série, convergeant par rapport à x en dedans de (RR'), convergera par rapport à ρ absolument et uniformément à l'intérieur de tout domaine fini.

23. Désignons par

$$\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots$$

les mineurs d'ordre 1, 2, .. du déterminant $D(\rho)$ de sorte que, d'une manière générale,

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{pmatrix}$$

représente le mineur d'ordre ν qui s'obtient en remplaçant dans $D(\rho)$ chacun des éléments $\chi_{i_1 k_1} \ldots \chi_{i_\nu k_\nu}$ par l'unité et les autres éléments des lignes $i_1 \ldots i_\nu$ ou des colonnes $k_1 \ldots k_\nu$ par zéro.

Soit ρ' un zéro quelconque de $D(\rho)$; d'après ce que nous avons vu (§ 2), il existe toujours un mineur qui ne s'annulle pas pour $\rho = \rho'$. Supposons donc que, pour $\rho = \rho'$, le mineur

$$\binom{i_1 \; .. \; i_r}{k_1 \; .. \; k_r}$$

soit différent de zéro. Formons les mineurs suivants:

$$\binom{\iota_1 \; .. \; \iota_\nu}{\varkappa_1 \; .. \; \varkappa_\nu}, \qquad \begin{pmatrix} \nu=1,2,..r \\ \iota_1,\iota_2,..\iota_\nu = i_1, i_2, .. i_r \\ \varkappa_1,\varkappa_2,..\varkappa_\nu = k_1,k_2,..k_r \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire tous ceux des mineurs d'ordre $1, 2, .. r$ dont les indices ι et $\varkappa$ sont des nombres dans les suites respectives $i_1 \, .. \, i_r$ et $k_1 \, .. \, k_r$. Pour abréger le language, désignons par M l'ensemble de ces mineurs, par $M^{(1)}, M^{(2)}, M^{(3)}, ..$ les ensembles de ceux des mineurs M dont l'ordre est respectivement égal à $1, 2, 3 \ldots$ Nous supposerons que les indices $i_1 \, .. \, i_r, k_1 \, .. \, k_r$ soient choisis de manière que $\binom{i_1 \; .. \; i_r}{k_1 \; .. \; k_r}$ soit le seul des mineurs M qui ne s'annulle pas pour $\rho = \rho'$.

Si $r = 1$, c'est-à-dire s'il existe un mineur du premier ordre qui ne s'annulle pas, on n'aura pas besoin d'aller plus loin; mais supposons $r > 1$. Soit $(\rho - \rho')^\mu$ la plus haute puissance de $\rho - \rho'$ qui divise[1] $D(\rho)$; soient

$$(\rho - \rho')^{\mu_1}, \; (\rho - \rho')^{\mu_2}, \; .. \; (\rho - \rho')^{\mu_{r-1}}$$

les plus hautes puissances de $\rho - \rho'$ qui divisent respectivement tous les mineurs $M^{(1)}$, tous les mineurs $M^{(2)}$, .. tous les mineurs $M^{(r-1)}$.

On a nécessairement $\mu > \mu_1$; en effet, si l'on avait $\mu \leqq \mu_1$, on pourrait conclure de l'identité ((ε), n° 13) que les mineurs suivants

$$\binom{i}{k} \qquad (i = -\infty .. +\infty \,;\, k = k_1 .. k_r)$$

---

[1] Soient $G(\rho)$, $H(\rho)$ deux fonctions entières; nous dirons que $G(\rho)$ est *divisible* par $H(\rho)$ ou que $H(\rho)$ *divise* $G(\rho)$ si le quotient $G(\rho) : H(\rho)$ est une fonction entière.

et par suite, en vertu de l'identité ((δ), n° 13), que *tous* les mineurs du premier ordre seraient divisibles par $(\rho - \rho')^{\mu}$; ce qui est impossible, puisque $(\rho - \rho')^{\mu-1}$ est la plus haute puissance de $\rho - \rho'$ qui divise le premier membre de l'égalité

$$\frac{dD}{d\rho} = \sum_i \sum_k \binom{i}{k} \frac{d\chi_{ik}}{d\rho}.$$

Par le raisonnement précédent on voit d'ailleurs que *tous* les mineurs du premier ordre sont divisibles par la puissance $(\rho - \rho')^{\mu_1}$ au moins.

On a $\mu_1 > \mu_2$. En effet, il existe parmi les mineurs $M^{(1)}$ au moins un qui est divisible par la puissance $(\rho - \rho')^{\mu_1}$ au plus; soit $\binom{i_1}{k_1}$ ce mineur. Si l'on avait $\mu_1 \leqq \mu_2$, en appliquant au déterminant $\binom{i_1}{k_1}$ et à ses mineurs les relations du n° 13, on verrait que les mineurs suivants

$$\begin{pmatrix} i_1 & i \\ k_1 & k \end{pmatrix}, \qquad \left(\begin{smallmatrix} i = -\infty \ldots +\infty \\ k = -\infty \ldots +\infty \end{smallmatrix}\right)$$

c'est-à-dire *tous* les mineurs de $\binom{i_1}{k_1}$ du premier ordre, seraient divisibles par $(\rho - \rho')^{\mu_1}$, ce qui n'est pas possible.

On voit en même temps que *tous* les mineurs de D du deuxième ordre sont divisibles par $(\rho - \rho')^{\mu_2}$ au moins.

De plus, parmi les mineurs suivants:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i \\ k_1 & k \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{smallmatrix} i = i_1 \ldots i_r \\ k = k_1 \ldots i_r \end{smallmatrix}\right)$$

il existe au moins un qui n'est pas divisible par une puissance de $\rho - \rho'$ plus élevée que la $\mu_2$ième. En effet, soit $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \varkappa & \lambda \end{pmatrix}$ celui des mineurs $M^{(2)}$ pour lequel l'ordre de multiplicité de la racine ρ' est précisément égal à μ_2; supposons que μ_2' et μ_2'' soient les exposants des plus hautes puis-

sances de $\rho - \rho'$ qui divisent respectivement les mineurs $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \varkappa & k_1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ k_1 & \lambda\end{pmatrix}$.
Soit d'abord $\mu_2' \leqq \mu_2''$; dans les identités

$$\binom{\alpha}{k_1}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \varkappa & \lambda\end{pmatrix} = \binom{\alpha}{\varkappa}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ k_1 & \lambda\end{pmatrix} + \binom{\alpha}{\lambda}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \varkappa & k_1\end{pmatrix}$$

$$\binom{\beta}{k_1}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \varkappa & \lambda\end{pmatrix} = \binom{\beta}{\varkappa}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ k_1 & \lambda\end{pmatrix} + \binom{\beta}{\lambda}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \varkappa & k_1\end{pmatrix},$$

$\binom{\alpha}{\varkappa}$, $\binom{\alpha}{\lambda}$, $\binom{\beta}{\varkappa}$, $\binom{\beta}{\lambda}$ sont divisibles par $(\rho - \rho')^{\mu_1}$ au moins et $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ k_1 & \lambda\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \varkappa & k_1\end{pmatrix}$ par $(\rho - \rho')^{\mu'_2}$ au moins, mais $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \varkappa & \lambda\end{pmatrix}$ par $(\rho - \rho')^{\mu_2}$ au plus; donc $\binom{\alpha}{k_1}$ et $\binom{\beta}{k_1}$ sont divisibles par $\rho - \rho'$ au moins $\mu_1 + \mu_2' - \mu_2$ fois. Or le premier membre de l'identité

$$\binom{i_1}{k_1}\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \varkappa & k_1\end{pmatrix} = \binom{\alpha}{k_1}\begin{pmatrix}i_1 & \beta \\ \varkappa & k_1\end{pmatrix} + \binom{\beta}{k_1}\begin{pmatrix}\alpha & i_1 \\ \varkappa & k_1\end{pmatrix}$$

étant, au plus, divisible $\mu_1 + \mu_2'$ fois par $\rho - \rho'$, on en conclut qu'il n'est pas possible que les mineurs

$$\begin{pmatrix}i_1 & \beta \\ \varkappa & k_1\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}i_1 & \beta \\ k_1 & \varkappa\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}\alpha & i_1 \\ \varkappa & k_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i_1 & \alpha \\ k_1 & \varkappa\end{pmatrix}$$

soient tous deux divisibles par une puissance plus élevée que $(\rho - \rho')^{\mu_2}$. Si l'on suppose en second lieu $\mu_2' \geqq \mu_2''$, on voit par un raisonnement analogue, qu'au moins un des mineurs

$$\begin{pmatrix}i_1 & \beta \\ k_1 & \lambda\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}i_1 & \alpha \\ k_1 & \lambda\end{pmatrix}$$

est, au plus, divisible par $(\rho - \rho')^{\mu_2}$. Donc notre assertion se trouve toujours justifiée.

Supposons, en vertu de ce résultat, que les indices $i_1 \dots i_r$ et $k_1 \dots k_r$ soient rangés dans un ordre tel que le mineur $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$ soit divisible par $\rho - \rho'$ précisément μ_2 fois. D'une manière parfaitement analogue à la précédente, on pourra démontrer que $\mu_2 > \mu_3$ et qu'il existe parmi les mineurs suivants:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i \\ k_1 & k_2 & k \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} i = i_1 \dots i_r \\ k = k_1 \dots k_r \end{pmatrix}$$

au moins un pour lequel ρ' est une racine d'ordre de multiplicité précisément égal à μ_3. On supposera que $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{pmatrix}$ soit ce mineur et l'on continuera ainsi de proche en proche jusqu'à ce qu'on arrive au mineur

$$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_{r-1} \\ k_1 & \dots & k_{r-1} \end{pmatrix}.$$

Il est facile de voir qu'on a $\mu \geqq r$; en effet, tous les mineurs d'ordre $r - 1$ prenant, pour $\rho = \rho'$, la valeur nulle, tous les mineurs d'ordre $r - 2$ s'annulleront d'ordre 2 au moins, tous ceux d'ordre $r - 3$ s'annulleront d'ordre 3 au moins, ..., tous ceux d'ordre 1 s'annulleront d'ordre $r - 1$ au moins; donc ρ' est pour $D(\rho)$ une racine multiple d'ordre r au moins, c'est-à-dire on a $\mu \geqq r$.

De plus, puisque le second membre de l'identité

$$\begin{vmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} i_2 \\ k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix} D(\rho)$$

ne s'annulle que d'ordre $\mu + \mu_2$, tandis que le premier devient nul d'ordre $2\mu_1$ au moins, on a nécessairement $2\mu_1 \leqq \mu + \mu_2$ ou, ce qui revient au même,

$$\mu - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2;$$

et de même, puisque le second membre de

$$\begin{vmatrix} \binom{i_1\ i_2}{k_1\ k_2}\binom{i_1\ i_2}{k_1\ k_3} \\ \binom{i_1\ i_3}{k_1\ k_2}\binom{i_1\ i_3}{k_1\ k_3} \end{vmatrix} = \binom{i_1\ i_2\ i_3}{k_1\ k_2\ k_3}\binom{i_1}{k_1}$$

ne s'annulle que d'ordre $\mu_1 + \mu_3$ et que le premier devient nul d'ordre $2\mu_2$ au moins, on doit avoir $2\mu_2 \leqq \mu_1 + \mu_3$ ou

$$\mu_1 - \mu_2 \geqq \mu_2 - \mu_3,$$

et ainsi de suite.

Donc, nous sommes parvenus au théorème suivant:

Soit ρ' une racine multiple d'ordre μ de $D(\rho)$, il existe toujours un mineur d'ordre μ qui ne devient pas nul; soit

$$\binom{i_1\ ..\ i_r}{k_1\ ..\ k_r}$$

un mineur d'ordre r ($r \leqq \mu$) qui ne s'évanouit pas pour $\rho = \rho'$ et supposons que les indices $i_1\ ..\ i_r$, $k_1\ ..\ k_r$ soient choisis de telle manière que tous les autres mineurs M s'annullent pour $\rho = \rho'$; soient

$$\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{r-1}$$

les exposants des plus hautes puissances de $\rho - \rho'$ qui divisent tous les mineurs $M^{(1)}$, tous les mineurs $M^{(2)}$, .. tous les mineurs $M^{(r-1)}$: $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{r-1}$ seront les exposants des plus hautes puissances de $\rho - \rho'$ qui divisent tous les mineurs du premier ordre, tous les mineurs du deuxième ordre, .. tous les mineurs d'ordre $r - 1$; on aura

$$\mu > \mu_1 > \ldots > \mu_{r-1}$$

$$\mu - \mu_1 \geqq \mu_1 - \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_{r-1}$$

et l'on pourra, de plus, toujours ranger les indices $i_1 \ldots i_r$ *et* $k_1 \ldots k_r$ *dans un ordre tel que* ρ' *soit pour les mineurs respectifs:*

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} \end{pmatrix}$$

une racine d'ordre de multiplicité $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{r-1}$.

Nous donnerons désormais aux déterminants

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

le nom de *mineurs caractéristiques* et aux nombres $\mu, \mu_1, \ldots \mu_{r-1}$ le nom de *nombres caractéristiques* correspondant à la racine ρ'.

Il résulte de cette définition et des théorèmes précédents que les nombres caractéristiques correspondant à une racine quelconque sont entièrement déterminés, quand bien même on pourrait trouver plusieurs systèmes de déterminants caractéristiques.

Pour trouver actuellement le mineur caractéristique $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$, il suffit d'examiner un certain nombre fini de mineurs. En effet, après avoir déterminé, par la méthode donnée dans le § 2, un entier m' tel que le mineur $\begin{pmatrix} -m' & \ldots & +m' \\ -m' & \ldots & +m' \end{pmatrix}$ ne s'annulle pas pour $\rho = \rho'$, les nombres $i_1 \ldots i_r$, $k_1 \ldots k_r$ se trouveront dans la suite $-m' \ldots +m'$ et l'on n'aura qu'à envisager ceux des mineurs d'ordre $1, 2, \ldots 2m'+1$ qui se définissent par des nombres dans cette suite.

24. Les théorèmes précédents nous donnent le moyen d'obtenir dans le cas général les intégrales de l'équation différentielle (1).

Pour que la série

$$y = \sum_\lambda g_\lambda x^{\rho'+\lambda}$$

représente à l'intérieur de l'anneau circulaire (RR') une intégrale de (1), il ne faut pas seulement que les g_λ satisfassent aux équations

$$(17) \qquad \sum_\lambda \chi_{m\lambda}(\rho') g_\lambda = 0, \qquad (m = -\infty .. + \infty)$$

mais aussi, puisque par hypothèse le point 1 est situé à l'intérieur de (RR'), que les valeurs absolues des g_λ ne dépassent pas toute limite finie; en d'autres termes, on doit avoir

$$(17') \qquad |g_\lambda| < G, \qquad (\lambda = -\infty .. + \infty)$$

G désignant un nombre positif fini.

Or nous avons vu que le déterminant $D(\rho')$ du système (17) est de la forme normale pour toute valeur finie de ρ'; pour trouver les valeurs des g_λ nous pouvons, par conséquent, avoir recours aux théorèmes du § 2.

Pour que le système (17, 17') ait une solution, il faut que la valeur du déterminant

$$[\chi_{ik}(\rho')]_{i,k=-\infty..+\infty} = D(\rho')$$

soit nulle.

Premier cas: ρ' est une racine *simple* de $D(\rho)$. Parmi les mineurs du premier ordre, il existe au moins un qui n'est pas nul pour $p = \rho'$; si $\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}$ est ce mineur et qu'on pose

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix} g_\lambda(\rho) = \begin{pmatrix} i_1 \\ \lambda \end{pmatrix} g_{k_1}(\rho),$$

les quantités $g_\lambda(\rho')$ représenteront la solution du système (17), l'inconnu $g_{k_1}(\rho')$ restera indéterminé; et la série $\sum_\lambda g_\lambda(\rho') x^{\rho'+\lambda}$, convergeant en dedans de (RR') (n° 22) et n'étant point identiquement nulle, représentera une intégrale de l'équation (1).

Second cas: ρ' est une racine multiple d'ordre μ ($\mu > 1$) de $D(\rho)$. Soient

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} i_1 & .. & i_r \\ k_1 & .. & k_r \end{pmatrix}$$

un système de mineurs caractéristiques et

$$\mu\,,\,\mu_1\,,\,\mu_2\,,\,\ldots\,\mu_{r-1}$$

les nombres caractéristiques correspondant à la racine ρ'. En introduisant, pour abréger, les notations suivantes

$$\mu-\mu_1=\nu_1\,,\qquad \mu_1-\mu_2=\nu_2\,,\quad\ldots\quad \mu_{r-1}=\nu_r\,,$$

on a:

$$\mu\geqq r;\qquad \mu>\mu_1>\ldots>\mu_{r-1};\qquad \nu_1\geqq\nu_2\geqq\ldots\geqq\nu_r.$$

La solution du système (17) est donnée par les relations

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r\end{pmatrix}_1 g_\lambda = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ \lambda & k_2 & \ldots & k_r\end{pmatrix}_1 g_{k_1} + \ldots + \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} & \lambda\end{pmatrix}_1 g_{k_r}, \quad {\scriptstyle(\lambda=-\infty\ldots+\infty)}$$

le signe 1 indiquant les valeurs que prennent les mineurs pour $\rho=\rho'$, et $g_{k_1}, g_{k_2}, \ldots g_{k_r}$ désignant des constantes arbitraires. La série $\sum_\lambda g_\lambda x^{\rho'+\lambda}$ ainsi obtenue converge à l'intérieur de (RR'); en effet, cette série est une somme de déterminants infinis qui s'obtiennent en remplaçant dans certains mineurs les éléments de certaines lignes par les puissances de x.

Donc, cette série représente une intégrale de (1) et, puisqu'elle contient r constantes arbitraires, il existe r intégrales linéairement indépendantes de (1) de la forme

$$x^{\rho'}\left\{\mathfrak{P}(x)+\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right\},$$

l'expression entre les crochets désignant une série procédant selon les puissances entières positives et négatives de x et convergeant en dedans de (RR'). Donc, dans le cas particulier où $r=\mu$, le nombre des intégrales ainsi obtenues est égal à l'ordre de multiplicité de la racine ρ'.

Considérons le cas général: $r\leqq\mu$. Posons

$$g_{1\lambda}(\rho)=c_{11}\begin{pmatrix} i_1\\ \lambda\end{pmatrix},$$

$$y_1(x\,,\,\rho)=\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{1\lambda}(\rho)\,x^{\rho+\lambda},$$

c_{11} désignant une constante arbitraire; en remplaçant y par $y_1(x, \rho)$ dans l'expression $P(y)$, on trouve

$$P(y_1(x, \rho)) = \sum_m G_m(\rho) x^{\rho+m-n}$$

où

$$G_m(\rho) = \varphi(\rho + m) g_{1m}(\rho) + \sum_\lambda' A_{m\lambda} g_{1\lambda}(\rho)$$
$$= \frac{1}{h_m(\rho)} \sum_\lambda \chi_{m\lambda}(\rho) g_{1\lambda}(\rho);$$

en remarquant qu'on a

$$\sum \binom{i_1}{\lambda} \chi_{m\lambda} = \begin{cases} D(\rho), & \text{si } m = i_1 \\ 0, & \text{si } m \gtrless i_1 \end{cases}$$

cette égalité prend la forme

$$P(y_1(x, \rho)) = c_{11} \frac{D(\rho)}{h_{i_1}(\rho)} x^{\rho+i_1-n};$$

puisque les fonctions $h_m(\rho)$ n'ont pas de zéros, on voit que ρ' est une racine multiple d'ordre μ du second membre. On en conclut que les fonctions

$$P(y_1(x, \rho)), \ \frac{\partial}{\partial\rho} P(y_1(x, \rho)), \ \ldots \ \frac{\partial^{\mu-1}}{\partial\rho^{\mu-1}} P(y_1(x, \rho))$$

ou, ce qui revient au même,

$$P(y_1), \ P\left(\frac{\partial y_1}{\partial\rho}\right), \ \ldots \ P\left(\frac{\partial^{\mu-1} y_1}{\partial\rho^{\mu-1}}\right)$$

s'évanouissent pour $\rho = \rho'$; en d'autres termes, si l'on pose

$$\frac{\partial^\nu y_1(x, \rho)}{\partial\rho^\nu} = y_1^{(\nu)}(x, \rho),$$

les fonctions $y_1(x, \rho')$, $y_1'(x, \rho')$, .. $y_1^{(\mu-1)}(x, \rho')$ satisferont à l'équation (1).

Si $\mu_1 = 0$, on aura $g_{1k_1}(\rho') \neq 0$ et les μ intégrales que nous avons obtenues ne seront pas identiquement nulles. Si $\mu_1 > 0$, les fonctions $y_1(x, \rho')$, $y_1'(x, \rho')$, .. $y_1^{(\mu_1-1)}(x, \rho')$ seront identiquement égales à zéro mais $y_1^{(\mu_1)}(x, \rho)$ ne s'évanouira pas identiquement pour $\rho = \rho'$.

La série $y_1(x, \rho)$ étant par rapport à ρ uniformément convergente en dedans de tout domaine fini (n° 22), on obtiendra ses dérivées successives en la différentiant terme par terme; et les séries ainsi obtenues convergeront aussi uniformément en dedans de tout domaine fini. Donc, en effectuant les différentiations, on trouve que les séries

$$
(\mathrm{I}') \quad \begin{cases}
y_{1.1} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{1\lambda}^{(\mu_1)}(\rho')\, x^{\rho'+\lambda} \\[2ex]
y_{1.2} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[g_{1\lambda}^{(\mu_1+1)}(\rho') + \frac{\mu_1+1}{\underline{|1}} g_{1\lambda}^{(\mu_1)}(\rho') \log x \right] x^{\rho'+\lambda} \\[2ex]
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\[2ex]
y_{1.\nu_1} = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[g_{1\lambda}^{(\mu-1)}(\rho') + \frac{\mu-1}{\underline{|1}} g_{1\lambda}^{(\mu-2)}(\rho') \log x + \ldots \right. \\[2ex]
\qquad \left. \ldots + \frac{(\mu-1)\ldots(\mu_1+1)}{\underline{|\nu_1-1}} g_{1\lambda}^{(\mu_1)}(\rho')(\log x)^{\nu_1-1} \right] x^{\rho'+\lambda}
\end{cases}
$$

représentent à l'intérieur de (RR') certaines intégrales de l'équation (1). $y_{1.1}$ n'est pas identiquement nulle et, dans chaque intégrale $y_{1.\nu}$ $(1 < \nu \leqq \nu_1)$, la plus haute puissance de $\log x$, $(\log x)^{\nu-1}$, se trouve multipliée par $y_{1.1}$ et par un nombre entier qui n'est pas nul; donc ces integrales $y_{1.1}$, $y_{1.2}$, .. $y_{1.\nu_1}$ sont linéairement indépendantes.

Soient c_{21}, c_{22} deux constantes arbitraires et posons

$$
g_{2\lambda}(\rho) = c_{21}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ \lambda & k_2 \end{pmatrix} + c_{22}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & \lambda \end{pmatrix},
$$

$$
y_2(x, \rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{2\lambda}(\rho)\, x^{\rho+\lambda};
$$

puisqu'on a identiquement

$$\sum_\lambda \binom{i_1 \ i_2}{\lambda \ k_2} \chi_{m\lambda} = \begin{cases} +\binom{i_2}{k_2}, & \text{si } m = i_1 \\ -\binom{i_1}{k_2}, & \text{si } m = i_2 \\ 0 \quad , & \text{si } m \gtrless i_1, i_2 \end{cases}$$

$$\sum_\lambda \binom{i_1 \ i_2}{k_1 \ \lambda} \chi_{m\lambda} = \begin{cases} -\binom{i_2}{k_1}, & \text{si } m = i_1 \\ +\binom{i_1}{k_1}, & \text{si } m = i_2 \\ 0 \quad , & \text{si } m \gtrless i_1, i_2 \end{cases}$$

on obtiendra, en posant

$$G_{i_1}(\rho) = + c_{21}\binom{i_2}{k_2} - c_{22}\binom{i_2}{k_1},$$

$$G_{i_2}(\rho) = - c_{21}\binom{i_1}{k_2} + c_{22}\binom{i_1}{k_1},$$

l'identité suivante:

$$P(y_2(x, \rho)) = \frac{G_{i_1}(\rho)}{h_{i_1}(\rho)} x^{\rho + i_1 - n} + \frac{G_{i_2}(\rho)}{h_{i_2}(\rho)} x^{\rho + i_2 - n}.$$

En remarquant que le second membre de cette égalité s'annulle d'ordre μ_1 au moins pour $\rho = \rho'$, tandis que $y_2(x, \rho)$ ne s'annulle que d'ordre μ_2, et en raisonnant comme tout à l'heure, on voit que les séries

$$(\mathrm{I}'') \qquad \left\{ \begin{aligned} y_{2.1} &= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{2\lambda}^{(\mu_2)}(\rho') x^{\rho'+\lambda} \\ y_{2.2} &= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[g_{2\lambda}^{(\mu_2+1)}(\rho') + \frac{\mu_2+1}{\underline{|1}} g_{2\lambda}^{(\mu_2)}(\rho') \log x \right] x^{\rho'+\lambda} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{2\nu_2} &= \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \left[g_{2\lambda}^{(\mu_1-1)}(\rho') + \frac{\mu_1-1}{\underline{|1}} g_{2\lambda}^{(\mu_1-2)}(\rho') \log x + \cdots \right. \\ &\quad \left. \cdots + \frac{(\mu_1-1)\cdots(\mu_2+1)}{\underline{|\nu_2-1}} g_{1\lambda}^{(\mu_2)}(\rho')(\log x)^{\nu_2-1} \right] x^{\rho'+\lambda} \end{aligned} \right.$$

représentent ν_2 intégrales linéairement indépendantes.

Jusqu'ici nous avons obtenu ν_1 intégrales: $y_{1.1}, y_{1.2}, \ldots y_{1.\nu_1}$ et ν_2 intégrales: $y_{2.1}, y_{2.2}, \ldots y_{2.\nu_2}$; en procédant de la même manière, nous obtiendrons successivement $\nu_3, \nu_4, \ldots$ intégrales. Enfin, soient $c_{r1}, c_{r2}, \ldots c_{rr}$ r constantes arbitraires et posons

$$g_{r\lambda}(\rho) = c_{r1}\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ \lambda & k_2 & \ldots & k_r \end{pmatrix} + \ldots + c_{rr}\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} & \lambda \end{pmatrix},$$

$$y_r(x, \rho) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{r\lambda}(\rho)\, x^{\rho+\lambda};$$

en tenant compte de ce que chaque série de la forme

$$\sum_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{s-1} & i_s & i_{s+1} & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{s-1} & \lambda & k_{s+1} & \ldots & k_r \end{pmatrix} \chi_{m\lambda} \qquad (s=1,2,\ldots r)$$

est identiquement nulle si $m \gtrless i_1 \ldots i_r$, mais égal à un certain mineur d'ordre $r - 1$ si m est égal à l'un des indices $i_1 \ldots i_r$, on obtient

$$P(y_r(x, \rho)) = \frac{G_{i_1}(\rho)}{h_{i_1}(\rho)} x^{\rho+i_1-n} + \ldots + \frac{G_{i_r}(\rho)}{h_{i_r}(\rho)} x^{\rho+i_r-n},$$

où $G_{i_1}(\rho), G_{i_2}(\rho), \ldots G_{i_r}(\rho)$ désignent des fonctions linéaires à coefficients constants de certains mineurs d'ordre $r - 1$; et puisque, pour tous ces mineurs, ρ' est une racine multiple d'ordre μ_{r-1} au moins, tandis que $\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$ ne s'annulle pas, on arrive, en raisonnant comme plus haut, au résultat que les séries

$$(\mathrm{I}^{(r)}) \qquad \begin{cases} y_{r.1} = \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} g_{r\lambda}(\rho')\, x^{\rho'+\lambda} \\ y_{r.2} = \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} [g'_{r\lambda}(\rho') + g_{r\lambda}(\rho').\log x]\, x^{\rho'+\lambda} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{r.\nu_r} = \sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \Big[g_{r\lambda}^{(\mu_{r-1}-1)}(\rho') + \frac{\mu_{r-1}-1}{\underline{|1}}\, g_{r\lambda}^{(\mu_{r-1}-2)}(\rho')\log x + \ldots \\ \qquad\qquad \ldots + g_{r\lambda}(\rho')(\log x)^{\mu_{r-1}-1}\Big]\, x^{\rho'+\lambda} \end{cases}$$

représentent ν_r intégrales linéairement indépendantes.

En résumé, nous avons obtenu $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_r = \mu$ intégrales partagées entre r sous-groupes:

$$y_{k.1}\,,\; y_{k.2}\,,\; \ldots\; y_{k.\nu_k} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots r)}$$

et telles que les ν_k intégrales du $k^{\text{ième}}$ sous-groupe sont linéairement indépendantes. Pour que *toutes* les μ intégrales soient linéairement indépendantes, il suffit de fixer les valeurs des constantes arbitraires comme il suit:

$$c_{kk} \neq 0; \qquad c_{k1} = c_{k2} = \ldots = c_{kk-1} = 0. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots r)}$$

En effet, dans ces conditions, on voit d'abord que les intégrales

$$y_{1.1}\,,\; y_{2.1}\,,\; \ldots\; y_{r.1}$$

sont linéairement indépendantes; car, si l'on avait une relation linéaire homogène à coefficients constants:

$$K_1 y_{1.1} + K_2 y_{2.1} + \ldots + K_r y_{r.1} = 0,$$

les égalités suivantes devraient, entre autres, avoir lieu:

$$(18) \qquad \begin{aligned} &K_1[y_{1.1}]_{k_1} + K_2[y_{2.1}]_{k_1} + \ldots + K_r[y_{r.1}]_{k_1} = 0, \\ &K_1[y_{1.1}]_{k_2} + K_2[y_{2.1}]_{k_2} + \ldots + K_r[y_{r.1}]_{k_2} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &K_1[y_{1.1}]_{k_r} + K_2[y_{2.1}]_{k_r} + \ldots + K_r[y_{r.1}]_{k_r} = 0, \end{aligned}$$

$[y_{\nu.1}]_{k_s}$ désignant le coefficient de $x^{\rho'+k_s}$ dans la série $y_{\nu.1}$; et puisqu'on a

$$[y_{\nu.1}]_{k_s} \begin{cases} = 0 & \text{pour} \quad s < \nu, \\ \neq 0 & \text{pour} \quad s = \nu, \end{cases}$$

de sorte que le déterminant du système (18) est différent de zéro, ce système ne saurait être satisfait que pour

$$K_1 = K_2 = \ldots = K_r = 0.$$

De plus, dans chacune des μ intégrales que nous avons obtenues, le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$ est égal à l'une des intégrales $y_{1.1}, y_{2.1}, \ldots y_{r.1}$ multipliée par un facteur constant; donc toute fonction linéaire homogène des μ intégrales $y_{k.s}$:

$$u = \sum_{k,s} K_{k.s} y_{k.s}$$

peut s'écrire comme une fonction entière rationnelle de $\log x$ dans laquelle le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$ est linéaire et homogène par rapport aux fonctions $y_{1.1}, y_{2.1}, \ldots y_{r.1}$; or on sait qu'une fonction u de cette nature ne saurait être identiquement nulle à moins que tous ses coefficients ne soient identiquement nuls. Donc, le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$ devant être identiquement nul, il faut donner à certaines des constantes $K_{k.s}$ la valeur nulle; dans la forme nouvelle que prend la fonction u, le coefficient de la plus haute puissance de $\log x$ devient, comme il est facile de le voir, linéaire et homogène par rapport aux fonctions $y_{1.1}, y_{2.1}, \ldots y_{r.1}$, ce qui nous oblige à remplacer de nouveau certaines constantes $K_{k.s}$ par zéro, etc.

Donc, à la racine multiple d'ordre μ correspondent μ intégrales linéairement indépendantes: $y_{1.1} \ldots y_{r.\nu_r}$; la même chose ayant lieu pour chaque racine de $D(\rho)$ et le nombre des zéros incongruents (en tenant compte de leur ordre de multiplicité) étant égal à n, on voit qu'on obtient par cette méthode n intégrales linéairement indépendantes, ou, en d'autres termes, un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle proposée.

Comme nous avons vu, les intégrales correspondant à une racine multiple ρ' se partagent entre un certain nombre de sous-groupes. Voyons maintenant comment se comportent les intégrales d'un de ces sous-groupes lorsque la variable indépendante décrit à l'intérieur du domaine (RR') un chemin fermé quelconque. Désignons par $\bar{y}$ la valeur qu'aquiert une fonction y de x après que x a décrit complètement et une seule fois un chemin L, qui est contenu tout entier en dedans du domaine (RR') et qui ne se coupe pas soi-même. Pour abréger, désignons par $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\nu$ les intégrales appartenant à un sous-groupe de ν éléments; par les formules (I) on voit immédiatement qu'on aura:

$$
(19) \qquad
\begin{aligned}
\bar{\eta}_1 &= \omega'\eta_1 \\
\bar{\eta}_2 &= \omega'(\gamma_{21}\eta_1 + \eta_2) \\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\bar{\eta}_\nu &= \omega'(\gamma_{\nu 1}\eta_1 + \ldots + \gamma_{\nu,\nu-1}\eta_{\nu-1} + \eta_\nu),
\end{aligned}
$$

où $\omega' = e^{2\pi i\rho'}$ et où les coefficients $\gamma_{\alpha\beta}$ sont certains multiples de la quantité $2\pi i$ ou de ses puissances, lesquels seraient faciles à déterminer; en d'autres termes, les intégrales $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_\nu$ subiront une substitution linéaire de la forme:

$$
(20) \qquad
\left|
\begin{array}{l}
\omega' \\
\omega'\gamma_{21}, \omega' \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\omega'\gamma_{\nu 1}, \omega'\gamma_{\nu 2}, \ldots \omega'
\end{array}
\right| .
$$

En résumé, les résultats suivants se trouvent établis:

Soit (1) *une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions qui, à l'intérieur de l'anneau circulaire* (RR'), *peuvent être représentées par des séries convergentes procédant selon les puissances entières, positives et négatives, de* x; *soient* (3) *ces séries et formons le déterminant infini* $D(\rho)$; *soient* $\rho', \rho'', \ldots \rho^{(p)}$ p *racines incongruentes de* $D(\rho)$ *d'ordre de multiplicité* $s', s'', \ldots s^{(p)}$, *et soit* $s' + s'' + \ldots + s^{(p)} = n$; *il existe* n *intégrales linéairement indépendantes de l'équation* (1) *qui, à l'intérieur du domaine* (RR'), *se partagent entre* p *groupes contenant respectivement* $s', s'', \ldots s^{(p)}$ *intégrales et appartenant respectivement aux racines* $\rho', \rho'', \ldots \rho^{(p)}$.

Soit ρ' *l'une desdites racines et* $s' = \mu$ *son ordre de multiplicité; soient*

$$\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{r-1}$$

les nombres caractéristiques correspondant à la racine ρ' *et*

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

un système de mineurs caractéristiques; les intégrales appartenant à la racine ρ' *se partageront entre* r *sous-groupes contenant respectivement* $\mu - \mu_1$, $\mu_1 - \mu_2$, .. μ_{r-1} *intégrales et se représenteront analytiquement par les formules* (I′, I″, .. $I^{(r)}$)*; ces formules font voir, de plus, que les intégrales d'un sous-groupe quelconque subissent une substitution linéaire de la forme* (20) *lorsque la variable indépendante décrit le chemin* L *à l'intérieur du domaine* (RR').

Si $\mu_1 = 0$, on doit avoir aussi $\mu_2 = \mu_3 = .. = \mu_{r-1} = 0$ ou, ce qui est la même chose, $\nu_1 = \mu$, $\nu_2 = \nu_3 = .. = \nu_r = 0$. Dans ce cas, et dans ce cas seulement, toutes les intégrales correspondant à la racine ρ' appartiendront à un seul sous-groupe. Donc:

Pour que les intégrales correspondant à la racine ρ' *forment un seul sous-groupe, il faut et il suffit qu'il existe un mineur du premier ordre qui ne s'annulle pas pour* $\rho = \rho'$ *ou, en d'autres termes, que* μ *soit le seul nombre caractéristique correspondant à cette racine.*

Parmi les intégrales appartenant à la racine ρ':

$$y_{1.1}, y_{1.2}, \dots y_{1.\nu_1}; \quad y_{2.1}, y_{2.2}, \dots y_{2.\nu_2}; \quad \dots; \quad y_{r.1}, y_{r.2}, \dots y_{r.\nu_r}$$

il n'y en a que r, savoir, $y_{1.1}, y_{2.1}, \dots y_{r.\nu_r}$ qui ne contiennent pas de logarithmes; donc, pour que les logarithmes disparaissent de toutes les μ intégrales, il faut et il suffit que l'on ait $r = \mu$; mais puisquon a

$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \dots \geqq \nu_r, \qquad \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_r = \mu,$$

l'égalité $r = \mu$ entraîne les relations suivantes:

$$\mu_1 = \mu - 1, \qquad \mu_2 = \mu - 2, \quad \dots \quad \mu_{r-1} = \mu - r + 1 = 1;$$

donc:

Pour que les μ *intégrales appartenant à la racine* ρ' *ne contiennent pas de logarithmes, ou, ce qui revient au même, pour qu'il existe une intégrale de la forme*

$$y = x^{\rho'}\left[\mathfrak{P}(x) + \mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

contenant μ constantes arbitraires, il faut et il suffit que les nombres caractéristiques correspondant à ρ' aient les valeurs:

$$\mu, \mu - 1, \mu - 2, \ldots 1.$$

25. Dans ce qui précède, nous avons supposé que l'équation différentielle proposée soit, par un changement convenable de variable indépendante, ramenée à une forme telle que les rayons de l'anneau circulaire (RR') remplissent les conditions

$$(21) \qquad R < 1 < R';$$

il est facile de voir que cette supposition n'est pas nécessaire. Soit, en effet,

$$(22) \qquad \frac{d^n y}{dx^n} + Q_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + Q_n(x)y = 0$$

l'équation donnée et supposons que les développements

$$Q_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \beta_{r\lambda} x^\lambda \qquad (r=2,3,\ldots n)$$

soient valables à l'intérieur de l'anneau circulaire $(R_1 R_1')$, R_1 et R_1' désignant des nombres positifs quelconques; soit $R_1 < R_1'$ et posons

$$R = \sqrt{\frac{R_1}{R_1'}}, \qquad R' = \sqrt{\frac{R_1'}{R_1}}, \qquad K = \sqrt{R_1 R_1'}, \qquad \alpha_{r\lambda} = \beta_{r\lambda} K^{r+\lambda};$$

il est clair que les séries

$$P_r(x) = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} \alpha_{r\lambda} x^\lambda \qquad (r=2,3,\ldots n)$$

convergeront en dedans de l'anneau circulaire (RR') et qu'on a $R < 1 < R'$; donc, en conservant les notations du n° 21, nous savons que la série $\sum_m \sum_\lambda' \chi_{m\lambda}$ converge absolument et uniformément à l'intérieur de tout domaine fini. Or, en désignant par $\bar{\chi}_{m\lambda}$ ce que devient $\chi_{m\lambda}$ en écrivant partout β au lieu de α, on aura

$$\chi_{m\lambda} = \bar{\chi}_{m\lambda} K^{m-\lambda}, \qquad \chi_{mm} = \bar{\chi}_{mm};$$

par conséquent (n° 17), le déterminant infini

$$\bar{D}(\rho) = [\bar{\chi}_{ik}]_{i,k=-\infty\ldots+\infty}$$

converge absolument et uniformément à l'intérieur de tout domaine fini et l'on a

$$\bar{D}(\rho) = D(\rho).$$

De plus, d'après le n° 22 nous savons que la série $\sum_m \sum_\lambda' |\chi_{m\lambda} x^{m-\lambda}|$ converge par rapport à x en dedans du domaine (RR'); donc $\sum_m \sum_\lambda' |\bar{\chi}_{m\lambda} x^{m-\lambda}|$ converge en dedans du domaine $(R_1 R_1')$. Donc, en remplaçant dans $\bar{D}(\rho)$ les éléments d'une ligne quelconque par les puissances de x, on obtient un déterminant qui, par rapport à x, converge en dedans de $(R_1 R_1')$ et, par rapport à ρ, en dedans de tout domaine fini (n° 14).

De la même manière, on voit qu'aussi les autres résultats obtenus subsistent si l'on remplace partout les α par les β. Donc les théorèmes précédents subsistent pour le cas où les rayons de l'anneau circulaire considéré ne satisfont pas à la condition (21).

26. Pour appliquer ce qui précède à un exemple facile, considérons le cas particulier et bien connu où les $P_r(x)$, dans le voisinage du point $x = 0$, se présentent sous la forme

$$P_r(x) = x^{-r}\mathfrak{P}_r(x); \qquad (r = 2, 3, \ldots n)$$

dans ce cas on a:

$$\alpha_{2,\lambda-2} = \alpha_{3,\lambda-3} = \ldots = \alpha_{n,\lambda-n} = 0, \qquad (\lambda = -1, -2, \ldots -\infty)$$

d'où:

$$\psi_{ik}(\rho) = 0, \qquad \chi_{ik}(\rho) = 0 \quad (\text{pour } k > i),$$

$$\Omega(\rho) = [\psi_{ik}]_{i,k=-\infty\ldots+\infty} = 1, \qquad D(\rho) = [\chi_{ik}]_{i,k=-\infty\ldots+\infty} = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{\sin(\rho - \rho_\nu)\pi}{\pi},$$

$$\rho^{(\nu)} = \rho_\nu. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots n)$$

Il est clair d'abord qu'on aura identiquement

$$\binom{i}{k} = 0 \quad \text{pour} \quad k < i;$$

plus généralement, en désignant par $i_1 . i_2 , .. i_\nu$ et $k_1 , k_2 , .. k_\nu$ des entiers quelconques remplissant les inégalités

$$i_1 < i_2 < .. < i_\nu,$$

$$k_1 < k_2 < .. < k_\nu,$$

on aura identiquement

$$\begin{pmatrix} i_1 & .. & i_\nu \\ k_1 & .. & k_\nu \end{pmatrix} = 0 \quad \text{pour} \quad k_1 < i_1;$$

en effet, on parvient à cette identité en appliquant au cas considéré le théorème généralisé de LAPLACE (n° 7).

Par là, en se rappelant la forme donnée aux intégrales dans le n° 24, on retrouve le théorème de M. FUCHS: toutes les intégrales sont *régulières* dans le voisinage du point $x = 0$.

Séparons les racines de $\varphi(\rho)$ en groupes tels que chacun d'eux comprenne, et comprenne seulement, toutes celles des racines dont les différences réciproques soient ou nulles ou entières. Soient $\rho_1 , \rho_2 , .. \rho_\mu$ les racines de l'un de ces groupes, rangées dans un ordre tel que l'on ait

$$\rho_1 = \rho_2 = .. = \rho_\alpha; \quad \rho_{\alpha+1} = \rho_{\alpha+2} = .. = \rho_\beta; \quad ..; \quad \rho_{\lambda+1} = \rho_{\lambda+2} = .. = \rho_\mu$$

$$\rho_1 = \rho_{\alpha+1} - a = \rho_{\beta+1} - b = .. = \rho_{\lambda+1} - l$$

$$a < b < .. < l,$$

$a , b , .. l$ désignant certains nombres entiers et *positifs*. Il est clair que, parmi les fonctions $\varphi(\rho + m)$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), il n'y a que les suivantes:

$$\varphi(\rho)\,,\ \varphi(\rho + a)\,,\ \varphi(\rho + b)\,,\ \ldots\ \varphi(\rho + l)$$

qui s'annullent pour $\rho = \rho_1$. On en conclut que le mineur

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & \ldots & l \\ 0 & a & b & \ldots & l \end{pmatrix} = \frac{\Pi(\rho)}{\chi_{00}\chi_{aa}\chi_{bb}\ldots\chi_{ll}}$$

est, pour $\rho = \rho_1$, différent de zéro. Donc, pour trouver les mineurs caractéristiques correspondant à la racine ρ', on n'a qu'à examiner ceux des mineurs $\begin{pmatrix} \iota_1 & \ldots & \iota_\nu \\ x_1 & \ldots & x_\nu \end{pmatrix}$ dont les indices $\iota_1 \ldots \iota_\nu$ et $x_1 \ldots x_\nu$ sont des nombres dans la suite $0, a, b, \ldots l$. Donc, *a fortiori*, il suffit d'examiner les mineurs dont les indices ι et x sont contenus dans la suite $0, 1, 2, \ldots l$.

Posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \chi_{00} & \chi_{01} & \ldots & \chi_{0l} \\ \chi_{10} & \chi_{11} & \ldots & \chi_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \chi_{l0} & \chi_{l1} & \ldots & \chi_{ll} \end{vmatrix}$$

et désignons, d'une manière générale, par

$$\begin{vmatrix} \iota_1 & \ldots & \iota_\nu \\ x_1 & \ldots & x_\nu \end{vmatrix}$$

le mineur de Δ d'ordre ν qui s'obtient en remplaçant dans Δ chacun des éléments $\chi_{\iota_1 x_1} \ldots \chi_{\iota_\nu x_\nu}$ par l'unité et tout autre élément des lignes $\iota_1 \ldots \iota_\nu$ ou des colonnes $x_1 \ldots x_\nu$ par zéro.

Dans le cas particulier dont il s'agit, on a (n° 7, (f)):

$$\begin{pmatrix} \iota_1 & \ldots & \iota_\nu \\ x_1 & \ldots & x_\nu \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \iota_1 & \ldots & \iota_\nu \\ x_1 & \ldots & x_\nu \end{vmatrix} \frac{\Pi(\rho)}{\chi_{00}\chi_{11}\ldots\chi_{ll}},$$

les ι et les $\varkappa$ étant des nombres quelconques dans la suite $0, 1, \ldots l$ et ν étant au plus égal à l. Donc, pour trouver les indices qui définissent les mineurs caractéristiques correspondant à ρ_1, il suffit d'envisager les mineurs du déterminant fini Δ. Supposons que le mineur $\begin{vmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{vmatrix}$ soit différent de zéro pour $\rho = \rho_1$; soit $(\rho - \rho_1)^{\mu_1}$ la plus haute puissance de $\rho - \rho_1$ qui divise tous les mineurs de Δ d'ordre 1, $(\rho - \rho_1)^{\mu_2}$ la plus haute puissance de $\rho - \rho_1$ qui divise tous les mineurs de Δ d'ordre 2, et ainsi de suite. Les nombres $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{r-1}$ seront les nombres caractéristiques correspondant à la racine ρ_1, et il sera toujours possible de ranger les indices $i_1 \ldots i_r$ et $k_1 \ldots k_r$ dans un ordre tel que

$$(\rho - \rho_1)^{\mu_1}, \ (\rho - \rho_1)^{\mu_2}, \ \ldots \ (\rho - \rho_1)^{\mu_{r-1}}$$

soient respectivement les plus hautes puissances de $\rho - \rho_1$ qui divisent les mineurs suivants

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ k_1 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}, \ \ldots \ \begin{vmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} \end{vmatrix}.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ k_1 \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}, \ \ldots \ \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix}$$

forment un système de mineurs caractéristiques correspondant à la racine ρ_1. Par là la séparation des intégrales en sous-groupes se trouve entièrement effectuée.

Ajoutons quelques remarques. Les entiers $i_1 \ldots i_r$ et $k_1 \ldots k_r$ étant certains nombres dans la suite $0, 1, \ldots l$, on sait que chaque déterminant de la forme

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & i_\nu & i_{\nu+1} & \ldots & i_p \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & \lambda & k_{\nu+1} & \ldots & k_p \end{pmatrix} \qquad (p \leqq r)$$

est identiquement nul si $\lambda < 0$. Ceci posé, les formules (I'), (I''), .. ($\mathrm{I}^{(r)}$) (n° 24) mettent immédiatement en évidence qu'il existe r intégrales linéairement indépendantes qui, dans le voisinage du point $x = 0$, se présentent sous la forme

$$x^{\rho_1}(g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \ldots);$$

je dis qu'il existe parmi ces intégrales au moins une pour laquelle on a

$$g_0 = g_1 = \ldots = g_{l-1} = 0, \qquad g_l \neq 0.$$

En effet, les indices $i_1 \ldots i_r$, $k_1 \ldots k_r$ peuvent être choisis de la manière suivante. Soit i_1 le plus petit des nombres $0, 1, \ldots l$ tel qu'il existe dans la suite

$$\begin{vmatrix} i_1 \\ k \end{vmatrix} \qquad\qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots l)}$$

au moins un mineur pour lequel ρ' est une racine précisément d'ordre μ_1; soit $\begin{vmatrix} i_1 \\ k_1 \end{vmatrix}$ *le premier* mineur dans cette suite qui satisfait à cette condition. Soit i_2 le plus petit des nombres $0, 1, \ldots l$ tel qu'il existe dans la suite

$$\begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k \end{vmatrix} \qquad\qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots l)}$$

au moins un mineur pour lequel ρ_1 est une racine précisément d'ordre μ_2; soit $\begin{vmatrix} i_1 & i_2 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix}$ le premier mineur qui satisfait à cette condition, et continuons ainsi de proche en proche. Parmi les nombres $k_1, k_2, \ldots k_r$ obtenus par cette méthode, il existe un qui est égal à l; en effet, si ces nombres etaient tous plus petits que l, le mineur $\begin{vmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{vmatrix}$ ne saurait être différent de zéro pour $\rho = \rho_1$. Soit donc $k_\nu = l$ $(\nu \leq r)$, le mineur $\begin{vmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{vmatrix}$ sera le premier dans la suite

$$\begin{vmatrix} i_1 & \ldots & i_{\nu-1} & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_{\nu-1} & k \end{vmatrix} \qquad\qquad {\scriptstyle (k=0,1,\ldots l)}$$

qui, pour $\rho = \rho_1$, devient nul précisément d'ordre μ_ν; donc l'intégrale désignée par $y_{\nu.1}$ dans le n° 24 se présentera nécessairement sous la forme

$$y = x^{\rho_1+l}\{c_0 + x\mathfrak{P}(x)\}, \qquad c_0 \neq 0$$

et la proposition se trouve démontrée.

Soient

$$\alpha', \alpha'', \ldots$$

les nombres $\alpha, \beta - \alpha, \ldots$, rangés par ordre de grandeur décroissante; puisqu'il existe un mineur du premier ordre qui, pour $\rho = \rho_1$, ne s'annulle que d'ordre $\mu - \alpha'$, on doit avoir: $\mu_1 \leqq \mu - \alpha'$; et de même, puisqu'il existe un mineur du deuxième ordre ne s'annullant que d'ordre $\mu - \alpha' - \alpha''$, on a $\mu_2 \leqq \mu - \alpha' - \alpha''$, et ainsi de suite. Or, nous savons que, pour que les intégrales appartenant à la racine ρ_1 ne contiennent point de logarithmes, il faut et il suffit que l'on ait

$$r = \mu, \qquad \mu - \mu_1 = \mu_1 - \mu_2 = \ldots = \mu_{r-1} = 1;$$

donc, pour que des logarithmes n'apparaîtront pas, il faut qu'on ait $\alpha' = 1$, c'est-à-dire

$$\alpha = \beta - \alpha = \gamma - \beta = \ldots = \mu - \lambda = 1;$$

en d'autres termes, des logarithmes apparaîtront toujours dans certaines intégrales si la fonction $\varphi(\rho)$ a des racines multiples.

Enfin, voyons quelle est la condition pour que les intégrales appartenant à la racine ρ_1 forment un seul sous-groupe. Cette condition est, nous le savons : $\mu_1 = 0$; or il est clair que tous ceux des mineurs $\binom{i}{k}$ dont l'indice $k \geq i > 0$, s'évanouissent pour $\rho = \rho_1$, puisque, dans chacun d'eux, l'élément χ_{00} entre comme facteur; et, parmi les mineurs $\binom{0}{k}$ où $0 \leqq k \leqq l$, $\binom{0}{l}$ est le seul qui *peut* être différent de zéro, puisque, dans tous les autres, l'élément χ_{ll} entre comme facteur; donc, pour que les intégrales appartenant à la racine ρ_1 forment un seul sous-groupe, il faut et il suffit que le mineur $\binom{0}{l}$, ou, ce qui revient au même, le déterminant suivant:

$$\begin{vmatrix} \chi_{10} & \chi_{11} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \chi_{l-1,0} & \chi_{l-1,1} & \cdot\ \cdot & \chi_{l-1,l-1} \\ \chi_{l0} & \chi_{l1} & \cdot\ \cdot & \chi_{l,l-1} \end{vmatrix}$$

soit, pour $\rho = \rho_1$, différent de zéro.[1]

§ 4. *Sur les invariants des équations différentielles linéaires.*

27. Voyons d'abord comment se rattachent les résultats précédents à la théorie ordinaire des équations différentielles linéaires. Soient y_1, $y_2, \ldots y_n$ un système fondamental d'intégrales de l'équation (1); si x décrit le chemin L, ces intégrales subiront une substitution linéaire de la forme

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdot\ \cdot & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdot\ \cdot & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdot\ \cdot & \beta_{nn} \end{pmatrix}$$

et l'équation fondamentale de M. Fuchs relative à l'anneau circulaire (RR') prendra la forme

$$(23) \qquad F(\omega) = \begin{vmatrix} \beta_{11} - \omega & \beta_{12} & \cdot\ \cdot & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - \omega & \cdot\ \cdot & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \cdot\ \cdot & \beta_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0.$$

[1] Cf. Fuchs, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten,* Journal für Mathematik, t. 68; Frobenius, *Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen*, même journal, t. 76.

Cherchons la relation entre cette fonction $F(\omega)$ et le déterminant $D(\rho)$ étudié dans le paragraphe précédent. En posant

$$e^{2\pi i\rho} = \omega, \qquad e^{2\pi i\rho^{(\lambda)}} = \omega^{(\lambda)},$$

l'égalité (15) (n° 21) devient

$$D(\rho) \,.\, K \,.\, e^{n\pi i\rho} = (\omega - \omega')(\omega - \omega'') \,..\, (\omega - \omega^{(n)}),$$

$$K = (2\pi i)^n e^{\frac{n(n-1)}{2}\pi i} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (2\pi i)^n .$$

Or, en choisissant pour $y_1, y_2, .. y_n$ le système fondamental obtenu dans le n° 24, on a, d'après les formules (19),

$$(24) \qquad F(\omega) = (\omega' - \omega)(\omega'' - \omega) \,..\, (\omega^{(n)} - \omega),$$

d'où

$$(25) \qquad F(\omega) = (-1)^n K e^{n\pi i\rho} D(\rho) .$$

Cette formule est la relation cherchée; elle fait voir, en particulier, que les égalités $F(e^{2\pi i\rho}) = 0$ et $D(\rho) = 0$ ont les mêmes racines, ce qu'on aurait pu prévoir.

Le déterminant de la substitution linéaire que subit un système fondamental d'intégrales en faisant parcourir à x le chemin L est, comme on sait, indépendant du choix de système fondamental; or en choisissant celui obtenu dans le n° 24, le déterminant substitutionnel devient égal au produit

$$\omega'\omega'' \,..\, \omega^{(n)} = e^{2\pi i \Sigma \rho^{(\nu)}}$$

dont la valeur est 1 (voir formule 16, n° 22). Donc, si x parcourt le chemin L, n intégrales linéairement indépendantes subiront toujours une substitution linéaire dont le déterminant est égal à l'unité.

Soient $y_1, y_2, .. y_\nu$ les intégrales appartenant à l'un des sous-groupes $\mathrm{I}', \mathrm{I}'', .. \mathrm{I}^{(r)}$. Il est facile de voir qu'en remplaçant chaque intégrale y_m par une certaine fonction linéaire homogène et à coefficients constants de

$y_1, y_2, \ldots y_m$, on obtient un sous-groupe d'intégrales $u_1, u_2, \ldots u_\nu$ telles qu'on ait[1]

$$\bar{u}_1 = \omega' u_1, \qquad \bar{u}_2 = \omega'(u_1 + u_2). \quad . \; . \quad \bar{u}_{\nu-1} = \omega'(u_{\nu-1} + u_\nu);$$

donc il existe un système fondamental d'intégrales pour lequel les coefficients substitutionnels β_{ik} prennent les valeurs

$$(26) \qquad \begin{aligned} &\beta_{ik} &&= 0, \quad \text{si } k > i; \qquad \beta_{ik} = 0, \quad \text{si } k < i - 1; \\ &\beta_{11} &&= \beta_{22} \quad = \ldots = \beta_{\mu\mu} \quad = \omega'; \ldots \\ &\beta_{21} &&= \beta_{32} \quad = \ldots = \beta_{\nu_1\nu_1-1} = \omega'; \ldots \\ &\beta_{\nu_1+1\nu_1} &&= \beta_{\nu_2+1\nu_2} = \ldots = \beta_{\nu_r+1\nu_r} = 0; \; \ldots \end{aligned}$$

Ceci posé, on démontre aisément que les *diviseurs élémentaires*[2] du déterminant $F(\omega)$, relatifs au facteur $\omega' - \omega$, sont les suivants:

$$(\omega' - \omega)^{\nu_1}, \; (\omega' - \omega)^{\nu_2}, \; \ldots \; (\omega' - \omega)^{\nu_r};$$

en effet, en désignant par les symboles

$$\begin{bmatrix} i_1 & \ldots & i_\nu \\ k_1 & \ldots & k_\nu \end{bmatrix}$$

les mineurs d'ordre ν de $F(\omega)$ et en introduisant les valeurs (26) des constantes β_{ik}, on voit que tous les mineurs du premier ordre sont divisibles par $\omega' - \omega$ μ_1 fois au moins, mais que le mineur suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \nu_1 \end{bmatrix} = (-\omega')^{\nu_1 - 1} \frac{F(\omega)}{(\omega' - \omega)^{\nu_1}}$$

est divisible par $\omega' - \omega$ *précisément* μ_1 fois; on voit de plus que tous les

---

[1] Cf. HAMBURGER, *Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten,* Journal für Mathematik, t. 76.

[2] WEIERSTRASS, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen.* Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868.

mineurs du deuxième ordre sont divisibles par $\omega' - \omega$ μ_2 fois au moins, mais que le suivant:

$$\begin{bmatrix} 1 & \nu_1 + 1 \\ \nu_1 & \nu_1 + \nu_2 \end{bmatrix} = (-\omega')^{\nu_1 - 1}(-\omega')^{\nu_2 - 1} \frac{F(\omega)}{(\omega' - \omega)^{\nu_1}(\omega' - \omega)^{\nu_2}}$$

est divisible *précisément* μ_2 fois; et ainsi de suite.

Or on sait que les diviseurs élémentaires du déterminant $F(\omega)$ sont absolument indépendants du choix de système fondamental d'intégrales. Donc, le système fondamental d'intégrales obtenu dans le § 3 se divise en sous-groupes de la manière prévue par la théorie ordinaire.[1]

28. Par la formule (25) on voit que l'étude de l'équation fondamentale de M. Fuchs se ramène à l'étude du déterminant infini $D(\rho)$. Dans le n° 21 nous avons vu que ce déterminant est une fonction entière de ρ si les séries $P_r(x)$ convergent à l'intérieur d'un anneau circulaire (RR') remplissant la condition (2); et dans le n° 25 nous avons étendu ce théorème au cas général où les $P_r(x)$ convergent à l'intérieur d'un anneau circulaire quelconque. Il reste à rechercher maintenant quel est le caractère de la fonction $D(\rho)$ par rapport aux paramètres $\alpha_{r\lambda}$.

Considérons d'abord le cas où la condition (2) se trouve satisfaite, et commençons par l'étude du déterminant $\Omega(\rho)$. Si toutes les racines $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ de $\varphi(\rho)$ sont incongruentes, nous avons vu (note citée p. 59) que ce déterminant peut être représenté par la formule

$$\Omega(\rho) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda \pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi$$

où les M_λ sont certaines constantes qui vérifient la relation

$$\sum_{\lambda=1}^{n} M_\lambda = 0.$$

[1] Outre la note de M. Hamburger, voir: Stickelberger, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* (Akad. Antrittsschrift), Leipzig, Teubner, 1881; Casorati, *Sur la distinction des intégrales en sous-groupes*, Comptes rendus des séances de l'académie des sciences de Paris, Janvier 1881.

Considérons maintenant le cas général où $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{n'}$ $(n' \leqq n)$ sont les racines incongruentes de $\varphi(\rho)$; soit s_λ le nombre des racines de $\varphi(\rho)$ congruentes à ρ_λ; on aura

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_{n'} = n.$$

Le point $\rho = \rho_\lambda$ étant pour $\Omega(\rho)$ un pôle d'ordre de multiplicité au plus égal à s_λ, on pourra écrire, dans un certain voisinage de ce point,

$$\Omega(\rho) = \mathfrak{P}(\rho - \rho_\lambda) + \frac{M_\lambda}{\rho - \rho_\lambda} + \sum_{\nu=1}^{s_\lambda - 1} M_{\lambda\nu} \frac{d^\nu}{d\rho^\nu}\left(\frac{1}{\rho - \rho_\nu}\right);$$

donc $\Omega(\rho)$ se représente par la formule suivante:

$$(27)\quad \Omega(\rho) = 1 + \sum_{\lambda=1}^{n'}\left[M_\lambda \pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi + \sum_{\nu=1}^{s_\lambda - 1} M_{\lambda\nu}\frac{d^\nu}{d\rho^\nu}(\pi\cot(\rho - \rho_\lambda)\pi)\right]$$

où les M_λ et les $M_{\lambda\nu}$ sont certaines combinaisons de certains déterminants infinis. En particulier, on a nécessairement entre les M_λ la relation suivante:

$$(27')\qquad \sum_{\lambda=1}^{n'} M_\lambda = 0.$$

Il s'agit d'étudier le caractère de ces constantes par rapport aux paramètres de l'équation différentielle proposée.

Vu que les éléments diagonaux du déterminant $\Omega(\rho)$ sont tous égaux à l'unité, en appliquant la formule (h) (n° 7) à ce déterminant, on aura:

$$(28)\qquad \Omega(\rho) = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \Omega^{(m)} = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p_1 \ldots p_m} \Omega^{(m)}_{p_1 \ldots p_m}$$

où:

$$(29)\qquad \Omega^{(m)} = \sum_{p_1 \ldots p_m} \Omega^{(m)}_{p_1 \ldots p_m}, \qquad \Omega^{(m)}_{p_1 \ldots p_m} = \begin{vmatrix} 0 & \psi_{p_1 p_2} & \ldots & \psi_{p_1 p_m} \\ \psi_{p_2 p_1} & 0 & \ldots & \psi_{p_2 p_m} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \psi_{p_m p_1} & \psi_{p_m p_2} & \ldots & 0 \end{vmatrix},$$

les indices $p_1 \ldots p_m$ parcourant tous les entiers qui satisfont aux conditions:

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_m.$$

Soit, dans le plan des ρ, B une aire finie ou infinie située entre deux droites verticales et telle qu'aucune des racines des fonctions $\varphi(\rho + m)$ ne se trouve dans son intérieur ou sur sa limite; la série $\sum_i \sum_k' \psi_{ik}$ étant uniformément convergente en dedans de B (voir: Sur une application des déterminants infinis etc. p. 57), il en sera de même de la série $\Omega^{(m)}$ (n° 15); donc cette série représente une fonction analytique uniforme de ρ, holomorphe en dedans de tout domaine tel que B. Cette fonction est de plus périodique et de période 1; en effet, en changeant ρ en $\rho + 1$, $\psi_{ik}(\rho)$ devient $\psi_{i+1,k+1}(\rho)$ de sorte que $\Omega^{(m)}_{p_1 \ldots p_m}$ devient $\Omega^{(m)}_{p_1+1 \ldots p_m+1}$, ce qui ne peut altérer la valeur de $\Omega^{(m)}$. Enfin, pour la fonction périodique $\Omega^{(m)}$, ρ_λ est un pôle d'ordre de multiplicité au plus égal à s_λ. Donc $\Omega^{(m)}$ pourra s'écrire comme une fonction linéaire des fonctions $\pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi$ et des dérivées de ces fonctions jusqu'à celle d'ordre $s_{\lambda-1}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots n'$); dans cette expression, le terme constant est nul, puisque, pour des valeurs indéfiniment croissantes de la partie imaginaire de ρ, $\Omega^{(m)}$ prend la valeur nulle. Écrivons donc:

$$\Omega^{(m)} = \sum_{\lambda=1}^{n'} \left[M_\lambda^{(m)} \pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi + \sum_{\nu=1}^{s_\lambda - 1} M_{\lambda\nu}^{(m)} \frac{d^\nu}{d\rho^\nu} (\pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi) \right], \tag{30}$$

$$\sum_{\lambda=1}^{n'} M_\lambda^{(m)} = 0, \qquad M_{\lambda 0}^{(m)} = M_\lambda^{(m)}.$$

Le déterminant $\Omega^{(m)}_{p_1 \ldots p_m}$ étant de degré m par rapport aux fonctions ψ_{ik} ($i \gtrless k$) et ces fonctions étant linéaires et homogènes par rapport aux paramètres

$$\alpha_{2,i-2}, \; \alpha_{3,i-3}, \; \ldots \; \alpha_{n,i-n}, \qquad (i = \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{31}$$

il est clair que les $M_{\lambda\nu}^{(m)}$ peuvent être exprimés par des séries procédant selon les puissances et les produits de degré m par rapport à ces paramètres.

Ces séries sont absolument convergentes et *dans celle qui représente $M_{\lambda\nu}^{(m)}$, chaque coefficient peut s'exprimer comme une fonction entière rationnelle de*

$$\pi, \; \rho_\lambda, \; \frac{1}{\rho_\lambda - \rho_\beta}, \; \pi \cot(\rho_\lambda - \rho_\beta)\pi \qquad (\beta = 1, \ldots \lambda - 1, \lambda + 1, \ldots n') \tag{32}$$

dans laquelle les coefficients sont des nombres rationnels.

Afin d'établir ce théorème, démontrons d'abord la proposition auxiliaire que voici. Soient $f_1(\rho)$, $f_2(\rho)$, .. $f_k(\rho)$ k fonctions entières rationnelles de ρ de degré $N - 2$ au plus dans lesquelles les coefficients sont des entiers; soient $F_1(\rho)$, $F_2(\rho)$, .. $F_k(\rho)$ k fonctions entières rationnelles en ρ de degré N, dans chacune desquelles le coefficient de la plus haute puissance de ρ est égal à 1, et supposons que ces dernières fonctions ne s'annullent que pour certaines valeurs de ρ congruentes aux ρ_λ $(\lambda = 1, 2, \ldots n')$; soient enfin $q_1, q_2, \ldots q_k$ k entiers positifs. La série multiple

$$S = \sum_{p_1 \ldots p_k} \frac{f_1(\rho + p_1)}{F_1(\rho + p_1)} \frac{f_2(\rho + p_2)}{F_2(\rho + p_2)} \cdots \frac{f_k(\rho + p_k)}{F_k(\rho + p_k)}$$

dans laquelle les $p_1 \ldots p_k$ parcourent tous les entiers remplissant les conditions

$$p_\mu \gtrless p_\alpha - q_\mu, \; p_\alpha - q_\mu + 1, \; \ldots \; p_\alpha + q_\alpha \qquad {\scriptstyle (\alpha = 1, 2, \ldots \mu - 1;\; \mu = 1, 2, \ldots k)}$$

sera une fonction périodique de ρ représentable par une expression de la forme suivante:

$$\sum_{\lambda=1}^{n'} \left[K_\lambda \pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi + \sum_{\nu=1}^{s_\lambda - 1} K_{\lambda\nu} \frac{d^\nu}{d\rho^\nu} (\pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi) \right], \tag{33}$$

s_λ désignant l'ordre de multiplicité du pôle ρ_λ et $K_{\lambda\nu}$ une fonction entière rationnelle des quantités (32) dans laquelle les coefficients sont des nombres rationnels.

Cette proposition est évidente dans le cas où $k = 1$; en effet, S se réduit dans ce cas à une série *simple* qui converge absolument et uniformément en dedans de B et qui ne change pas de valeur en remplaçant ρ par $\rho + 1$; donc cette série représente une fonction de la forme (33); et comme, de plus, il n'y a qu'un nombre fini de termes de S qui deviennent infinis pour $\rho = \rho_\lambda$, en développant S selon les puissances entières, positives et négatives, de $\rho - \rho_\lambda$, les coefficients seront des fonctions entières rationnelles, à coefficients rationnels, de ρ_λ et de

$$\frac{1}{\rho_\lambda - \rho_\beta} \qquad (\beta = 1, \ldots \lambda - 1, \lambda + 1, \ldots n')$$

Considérons le cas général. Évidemment on pourra écrire

$$(34) \qquad S = \sum_{p_1} \frac{f_1(\rho + p_1)}{F_1(\rho + p_1)} \cdot \sum_{p_2} \frac{f_2(\rho + p_2)}{F_2(\rho + p_2)} \cdot\cdot \sum_{p_k} \frac{f_k(\rho + p_k)}{F_k(\rho + p_k)} - H,$$

$p_1, p_2, \ldots p_k$ parcourant indépendamment l'un de l'autre tous les entiers positifs et négatifs et H désignant une expression linéaire et homogène, à coefficients entiers, de certaines séries multiples de la même forme que S mais d'ordre de multiplicité inférieur à k. Or le premier terme du second membre de (34) étant le produit de certaines expressions de la forme (33), $S + H$ sera aussi une telle expression. Donc, si la proposition est vraie pour $k = 1, 2, \ldots x - 1$, elle subsiste pour $k = x$; or elle est vraie pour $k = 1$, donc elle est *toujours* vraie.

Arrivons à la démonstration du théorème énoncé plus haut. Rappelons d'abord (n° 7) que la série $\Omega^{(m)}$ est absolument convergente par rapport aux éléments ψ_{ik}, c'est-à-dire qu'elle reste convergente même en remplaçant, dans le développement de chacun des déterminant $\Omega^{(m)}_{p_1 \ldots p_m}$, chaque terme par sa valeur absolue; on a donc le droit de ranger les termes de $\Omega^{(m)}$ dans un ordre quelconque. Écrivons ψ_{ik} sous la forme

$$(35) \quad \psi_{ik} = \frac{(\rho + i)^{n-2}}{\varphi(\rho + i)} H_2(i - k) + \frac{(\rho + i)^{n-3}}{\varphi(\rho + i)} H_3(i - k) + \ldots + \frac{1}{\varphi(\rho + i)} H_n(i - k)$$

$H_2(i - k), H_3(i - k), \ldots H_n(i - k)$ désignant certaines fonctions entières rationnelles, à coefficients entiers, de $i - k$ et de $\alpha_{2,i-k-2}, \alpha_{3,i-k-3}, \ldots \alpha_{n,i-k-n}$ (voir: Sur une application des déterminants infinis etc. p. 56). La série $\Omega^{(m)}$ pourra s'écrire comme une série absolument convergente ordonnée selon les puissances et les produits des fonctions $H_2(i - k), H_3(i - k), \ldots H_n(i - k)$; en effet, en désignant par $\bar{\psi}_{ik}$ ce que devient ψ_{ik} en remplaçant, dans l'expression du second membre de (35), chaque terme par sa valeur absolue, la série $\sum_i \sum'_k \bar{\psi}_{ik}$ sera convergente.

D'après la formule (29), $\Omega^{(m)}$ peut être regardé comme la somme d'une infinité de termes de la forme

$$\varepsilon \cdot \psi_{p_1 p_{\alpha_1}} \psi_{p_2 p_{\alpha_2}} \cdot\cdot \psi_{p_m p_{\alpha_m}},$$

$p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \ldots p_{\alpha_m}$ étant une permutation des nombres $p_1 p_2 \ldots p_m$ et ε désignant, suivant les cas, $+1$ ou -1. Donc $\Omega^{(m)}$ peut être regardé comme la somme de termes de la forme

$$\varepsilon \cdot \frac{(\rho + p_1)^{n-\beta_1}}{\varphi(\rho + p_1)} \cdots \frac{(\rho + p_m)^{n-\beta_m}}{\varphi(\rho + p_m)} \cdot H_{\beta_1}(p_1 - p_{\alpha_1}) \cdots H_{\beta_m}(p_m - p_{\alpha_m})$$

$\beta_1 \ldots \beta_m$ désignant des nombres dans la suite $2, 3, \ldots n$.

Soient $k_1, k_2, \ldots k_m$ m entiers différents de zéro qui vérifient l'égalité

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = 0,$$

et posons

$$(36) \qquad p_1 - p_{\alpha_1} = k_{\gamma_1}, \qquad p_2 - p_{\alpha_2} = k_{\gamma_2}, \quad \ldots \quad p_m - p_{\alpha_m} = k_{\gamma_m},$$

$\gamma_1 \ldots \gamma_m$ désignant une permutation des nombres $1, 2, \ldots m$. Il est clair que l'expression

$$(37) \qquad H_{\beta_1}(k_{\gamma_1}) H_{\beta_2}(k_{\gamma_2}) \ldots H_{\beta_m}(k_{\gamma_m})$$

ne contient que les paramètres suivants

$$(38) \qquad \alpha_{r,k_1-r}, \ \alpha_{r,k_2-r}, \ \ldots \ \alpha_{r,k_m-r}; \qquad {\scriptstyle (r=2,3,\ldots n)}$$

donc l'ensemble de ceux des termes de $\Omega^{(m)}$ qui, outre les $\alpha_{2,-2}, \alpha_{3,-3}, \ldots \alpha_{n,-n}$, ne contiennent que les paramètres (38), s'écrira comme la somme d'un certain nombre fini de séries de la forme

$$\varepsilon K \sum \frac{(\rho + p_1)^{n-\beta_1}}{\varphi(\rho + p_1)} \frac{(\rho + p_2)^{n-\beta_2}}{\varphi(\rho + p_2)} \cdots \frac{(\rho + p_m)^{n-\beta_m}}{\varphi(\rho + p_m)},$$

K désignant l'expression (37) et $p_1 \ldots p_m$ parcourant toutes les valeurs remplissant les égalités (36) et la condition

$$p_1 \gtrless p_2 \gtrless \ldots \gtrless p_m;$$

donc, d'après le lemme démontré tout à l'heure, ledit ensemble de termes prendra la forme (33), dans laquelle $K_{\lambda\nu}$ désigne une fonction entière rationnelle, à coefficients rationnels, des quantités (32) et des paramètres (31). Donc la proposition se trouve démontrée.

29. D'après les formules (11) et (28) on a

$$(39) \qquad D(\rho) = \Pi(\rho) + \sum_{m=2}^{\infty} \Pi(\rho) \Omega^{(m)}.$$

Puisque

$$\Pi(\rho) = \prod_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_{mm}(\rho),$$

$$\chi_{mm}(\rho) = \left(1 + \frac{\rho - \rho_1}{m}\right) e^{-\frac{\rho - \rho_1}{m}} \cdot\cdot \left(1 + \frac{\rho - \rho_n}{m}\right) e^{-\frac{\rho - \rho_n}{m}} = \frac{\varphi(\rho + m)}{m^n} e^{-\frac{n\rho}{m} + \frac{n(n-1)}{2m}},$$

en développant $\Pi(\rho)$ suivant les puissances croissantes de ρ, il est clair que les coefficients de la série ainsi obtenue sont des fonctions entières de

$$(40) \qquad \alpha_{2,-2}\,,\ \alpha_{3,-3}\,,\ \cdot\cdot\ \alpha_{n,-n};$$

dans ces fonctions, les coefficients sont des polynômes en π, dont les coefficients sont des nombres *rationnels.*

En vertu de l'égalité $\chi_{ik} = \varphi(\rho + i)\psi_{ik}$, la fonction $\Pi(\rho)\Omega^{(m)}$ s'écrira ainsi:

$$(41) \qquad \Pi(\rho)\Omega^{(m)} = \sum_{p_1 \cdot\cdot p_m} \frac{\Pi(\rho)}{\chi_{p_1 p_1} \cdot\cdot \chi_{p_m p_m}} D^{(m)}_{p_1 \cdot\cdot p_m},$$

$D^{(m)}_{p_1 \cdot\cdot p_m}$ désignant ce que devient $\Omega^{(m)}_{p_1 \cdot\cdot p_m}$ en remplaçant les ψ par les χ. Or nous savons que la série $\sum_m \sum'_\lambda \chi_{m\lambda}$ est une fonction entière de ρ; en l'écrivant comme une série ordonnée suivant les puissances croissantes de ρ, les coefficients dans cette série auront la forme de séries absolument convergentes ordonnées suivant les paramètres $\alpha_{r\lambda}$; de plus, si l'on écrit la fonction entière:

$$\frac{\Pi(\rho)}{\chi_{p_1 p_1} \cdot\cdot \chi_{p_m p_m}}$$

comme une série Σ ordonnée suivant les puissances de ρ, les coefficients seront des fonctions entières des paramètres (40) telles que, si l'on remplace dans chacune d'elles chaque terme par sa valeur absolue, la série Σ restera encore convergente. Donc, la série du second membre de (41) s'écrira comme une série ordonnée suivant les puissances de ρ dans laquelle chaque coefficient est une série absolument convergente, ordonnée suivant les puissances des paramètres α_{ik}; par rapport à ceux des α_{ik} où $k \gtrless -i$, les termes de ces séries seront de dégré m, puisque le déterminant $D^{(m)}_{p_1..p_m}$ est de degré m par rapport aux χ_{ik} et que les χ_{ik} $(i \gtrless k)$ sont linéaires et homogènes par rapport auxdits paramètres.

Or la série $\sum_m \Pi(\rho)\mathfrak{Q}^{(m)}$ est, par rapport à ρ, uniformément convergente à l'intérieur de tout domaine fini (cf. n° 15); donc $D(\rho)$ prendra la forme d'une série entière en ρ dont les coefficients sont des séries absolument convergentes, procédant selon les puissances des paramètres $\alpha_{r\lambda}$.

Je dis que, dans ces séries, chaque coefficient s'exprime comme une fonction entière rationnelle de π où les coefficients sont des nombres *rationnels.* Il suffit évidemment de le démontrer pour le cas où les racines $\rho_1, \rho_2, .. \rho_n$ de $\varphi(\rho)$ sont incongruentes; en effet, deux ou plusieurs de ces racines ne seront congruentes que quand les paramètres (40) satisfont à certaines conditions; or, les autres paramètres $\alpha_{r\lambda}$ étant regardés comme des constantes, $D(\rho)$ sera une série entière toujours convergente par rapport à ceux-là; donc, si la proposition est vraie dans le cas général où ces paramètres ne satisfont à aucunes relations, elle sera toujours vraie.

Les racines $\rho_1, \rho_2, .. \rho_n$ étant supposées incongruentes, si l'on écrit $\mathfrak{Q}^{(m)}$ comme une série ordonnée selon les paramètres (31), chaque coefficient dans cette série se mettra sous la forme

$$K(\rho) = \sum_{\lambda=1}^{n} K_\lambda \pi \cot(\rho - \rho_\lambda)\pi,$$

K_λ désignant une fonction entière rationnelle, à coefficients rationnels, des quantités

$$\pi, \ \rho_\lambda, \ \frac{1}{\rho_\lambda - \rho_\beta}, \ \pi \cot(\rho_\lambda - \rho_\beta)\pi; \qquad (\beta = 1,.. \lambda-1, \lambda+1,..n) \tag{42}$$

il est clair d'ailleurs que K_λ se change en K_μ si ρ_λ se change en ρ_μ.

La fonction $\Pi(\rho)K(\rho)$ est une fonction entière de ρ; si on la développe selon les puissances croissantes de ρ, chaque coefficient dans ce développement sera une fonction entière rationnelle en π, dont les coefficients seront des fonctions entières rationnelles, à coefficients rationnels, des quantités (42) et de plus, en les considérant comme fonctions de $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$, *symétriques* par rapport à ces variables. Or nous savons que $\Pi(\rho)K(\rho)$ est une fonction entière de ρ et de $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$; donc, en développant cette fonction selon les puissances croissantes de ρ, chaque coefficient s'écrira comme une série entière, toujours convergente et symétrique par rapport à $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$, dans laquelle les coefficients seront entiers et rationnels, à coefficients rationnels, par rapport au nombre π; chaque série de cette forme peut être exprimée comme une série entière toujours convergente par rapport aux paramètres (40) dans laquelle chacun des coefficients est entier et rationnel, à coefficients rationnels, par rapport à π; donc la démonstration se trouve achevée.

Pour arriver à ce résultat, nous avons supposé la condition (2) satisfaite; il est clair qu'on peut l'étendre immédiatement au cas général en se servant de la méthode employée dans le n° 25. Donc nous pouvons énoncer ce théoréme:

Si les développements (3) *des fonctions* $P_r(x)$ *convergent en dedans d'un anneau circulaire quelconque, le déterminant infini* $D(\rho)$ *peut s'écrire comme une série entière toujours convergente de* ρ; *chaque coefficient de cette série se représente par une série absolument convergente procédant selon les puissances et les produits des paramètres* $\alpha_{r\lambda}$; *dans chacune de ces séries, les coefficients sont des polynômes en* π *dont les coefficients sont des nombres rationnels.*

30. M. Poincaré a donné le nom d'*invariants* de l'équation (1), relatifs à l'anneau circulaire (RR'), aux coefficients I_μ dans le développement du déterminant $F(\omega)$ de M. Fuchs:

$$(-1)^n F(\omega) = \omega^n + I_1\omega^{n-1} + \ldots + I_{n-1}\omega + 1,$$

(où le terme indépendant de ω est égal à l'unité, d'après ce qui a été démontré dans le n° 27). Le problème de représenter analytiquement ces invariants a été résolu, comme on sait, dans des cas assez étendus par

MM. Fuchs[1] et Hamburger[2] et, dans le cas général, par MM. Poincaré[3] et Mittag-Leffler[4]. Les expressions analytiques qui ont été employées par ces auteurs pour représenter les I_μ, contiennent certains paramètres dont les invariants eux-mêmes sont absolument indépendants; l'emploi des déterminants infinis conduit aisément à des expressions plus simples, libérées de tout élément arbitraire.

En effet, posons $F(\omega) = f(\rho)$; d'après la formule (25), on voit que les quantités $f(0), f'(0), \dots f^{(n)}(0)$, divisées par $(2\pi i)^n$, s'expriment comme des fonctions linéaires homogènes de $D(0), D'(0), \dots D^{(n)}(0)$ dans lesquelles les coefficients sont des expressions entières rationnelles, à coefficients rationnels, en πi. Donc, en posant $\rho = 0$ dans les formules

$$F(\omega) = f(\rho), \qquad F'(\omega) = f'(\rho)\frac{d\rho}{d\omega}, \dots$$

$$\dots, F^{(n)}(\omega) = f^{(n)}(\rho)\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^n + \dots + f'(\rho)\frac{d^n\rho}{d\omega^n},$$

on obtient $F(1), F'(1), \dots F^{(n)}(1)$ sous la même forme.

Or on a

$$(-1)^n I_{n-\mu} = \frac{F^{(\mu)}(0)}{\underline{|\mu}}$$

et les $F^{(\mu)}(0)$ peuvent s'écrire comme des fonctions linéaires homogènes, à coefficients rationnels, de $F(1), F'(1), \dots F^{(n)}(1)$; donc:

Les invariants de l'équation (1), *relatifs à l'anneau circulaire* (RR'), *peuvent toujours s'exprimer comme des fonctions linéaires homogènes de*

---

[1] Fuchs, *Über die Darstellung der Functionen complexer Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen,* Journal für Mathematik, t. 75.

[2] Hamburger, *Über ein Princip zur Darstellung des Verhaltens mehrdeutiger Functionen einer complexen Variabeln, insbesondere der Integrale linearer Differentialgleichungen in der Umgebung singulärer Punkte,* Journal für Mathematik, t. 83.

[3] Poincaré, *Sur les groupes des équations linéaires,* Acta mathematica, t. 4; voir aussi: Vogt, *Sur les invariants fondamentaux des équations différentielles linéaires du second ordre,* thèse, Paris 1889.

[4] Mittag-Leffler, *Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène,* Acta mathematica, t. 15.

$D(0)$, $D'(0)$, .. $D^{(n)}(0)$; *dans chacune de ces fonctions, les coefficients sont des polynômes en* πi *dont les coefficients sont des nombres rationnels;*

et, d'après ce que nous avons démontré plus haut:

chacune des quantités $D(0)$, $D'(0)$, .. $D^{(n)}(0)$ *peut s'écrire comme une série absolument convergente ordonnée selon les paramètres* $a_{r\lambda}$ *dans laquelle les coefficients sont des polynômes en* π; *et, dans ces polynômes, les coefficients sont des nombres rationnels.*

31. Appliquons ces généralités à un exemple. Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{\alpha}{x^3} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x}\right) y = 0 \tag{43}$$

l'équation différentielle proposée; on aura identiquement

$$\begin{gathered} \psi_{ik} = 0 \quad \text{si } k > i + 1, \qquad \psi_{ik} = 0 \quad \text{si } k < i - 1 \\ \varphi(\rho) = \rho(\rho - 1) + \beta, \quad \psi_{i,i+1} = \frac{\alpha}{\varphi(\rho + i)}, \qquad \psi_{i,i-1} = \frac{\gamma}{\varphi(\rho + i)}. \end{gathered} \tag{44}$$

Premier cas: $1 - 4\beta$ n'est le carré d'aucun entier. Les deux racines ρ_1, ρ_2 de $\varphi(\rho)$ seront incongruentes:

$$\rho_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\beta}}{2}, \qquad \rho_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\beta}}{2};$$

donc $\Omega(\rho)$ prendra la forme

$$\Omega(\rho) = 1 + M_1 \pi \cot(\rho - \rho_1)\pi + M_2 \pi \cot(\rho - \rho_2)\pi$$

ou, en vertu de l'égalité $M_1 + M_2 = 0$,

$$\Omega(\rho) = 1 + 2M_1 \pi \frac{\sin 2\rho_1 \pi}{\cos 2\rho_1 \pi - \cos 2\rho \pi}.$$

Pour calculer M_1, faisons usage de la méthode employée dans le n° 28. D'après (29), en écrivant $\Omega(\rho)$ sous la forme

$$\Omega(\rho) = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \Omega^{(m)} = 1 + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p_1 \dots p_m} \Omega^{(m)}_{p_1 \dots p_m},$$

la série $\Omega^{(m)}$ sera identiquement nulle pour toute valeur *impaire* de m; et en posant, pour abréger les formules, $F(\rho) = \varphi(\rho)\varphi(\rho+1)$, on aura:

$$\Omega^{(2k)} = (-1)^k (\alpha\gamma)^k \sum_{p_1 < \dots < p_k} \frac{1}{F(\rho+p_1)F(\rho+p_2)\dots F(\rho+p_k)}.$$

En représentant $\Omega^{(2k)}$ par une expression de la forme suivante:

$$\Omega^{(2k)} = 2M_1^{(2k)}\pi \frac{\sin 2\rho_1\pi}{\cos 2\rho_1\pi - \cos 2\rho\pi},$$

nous savons que la constante $M_1^{(2k)}$ peut être exprimée comme une fonction entière rationnelle, à coefficients rationnels, de

$$\pi\,,\ \rho_1\,,\ \frac{1}{\rho_1 - \rho_2}\,,\ \pi\cot(\rho_1 - \rho_2)\pi$$

ou, ce qui revient au même, de

$$\pi\,,\ \rho_1\,,\ \frac{1}{2\rho_1 - 1}\,,\ \pi\cot 2\rho_1\pi;$$

bornerons-nous à calculer $M_1^{(2)}$ et $M_1^{(4)}$.

Parmi les fonctions $F(\rho+m)$ $(m = 0, \pm 1, \dots)$, $F(\rho)$ et $F(\rho-1)$ sont les seules qui s'annullent pour $\rho = \rho_1$; donc le résidu de la fonction $\Omega^{(2)}$, relatif au pôle ρ_1, aura la valeur:

$$M_1^{(2)} = -\alpha\gamma\left[\frac{1}{F'(\rho_1)} + \frac{1}{F'(\rho_1 - 1)}\right].$$

Pour trouver la valeur de $M_1^{(4)}$, écrivons $\Omega^{(4)}$ sous la forme

$$\Omega^{(4)} = (\alpha\gamma)^2\left\{\frac{1}{2}\left[\sum\frac{1}{F(\rho+m)}\right]^2 - \frac{1}{2}\sum\left[\frac{1}{F(\rho+m)}\right]^2 - \sum\frac{1}{F(\rho+m)F(\rho+m-1)}\right\};$$

pour abréger, désignons par le symbole $R(A)$ le résidu, relatif au pôle ρ_1, d'une fonction quelconque A; posons

$$G = \left[\sum \frac{1}{F(\rho+m)}\right]^2, \quad H = \sum \left[\frac{1}{F(\rho+m)}\right]^2, \quad K = \sum \frac{1}{F(\rho+m)\,F(\rho+m+1)}$$

on obtiendra aisément

$$R(H) = -\frac{F''(\rho_1)}{[F'(\rho_1)]^3} - \frac{F''(\rho_1-1)}{[F'(\rho_1-1)]^3},$$

$$R(K) = \frac{1}{F(\rho_1-2)\,F'(\rho_1-1)} + \frac{1}{F'(\rho_1)F(\rho_1+1)} -$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\frac{F''(\rho_1-1)F'(\rho_1)+F''(\rho_1)F'(\rho_1-1)}{[F'(\rho_1-1)]^2[F'(\rho_1)]^2};$$

de plus, puisque $(\alpha\gamma)^2 G = [\Omega^{(2)}]^2$, on a:

$$(\alpha\gamma)^2 R(G) = -2\,[M_1^{(2)}]^2 \pi \cot 2\rho_1\pi,$$

et la quantité $M_1^{(4)}$ se trouve déterminée par la formule

$$M_1^{(4)} = (\alpha\gamma)^2\left[\frac{1}{2}R(G) - \frac{1}{2}R(H) - R(K)\right].$$

Ces quantités une fois calculées, le résidu M_1 s'obtiendra par la formule

$$M_1 = M_1^{(2)} + M_1^{(4)} + \ldots + M_1^{(2k)} + \ldots.$$

Second cas: $1 - 4\beta$ est le carré d'un entier p. Les deux racines ρ_1, ρ_2 de $\varphi(\rho)$ seront congruentes:

$$\rho_1 = \frac{1-p}{2}, \qquad \rho_2 = \frac{1+p}{2}.$$

Donc, en vertu des formules (27) et (27'), la fonction $\Omega(\rho)$ pourra s'écrire

$$\Omega(\rho) = 1 + M_{11}\frac{d}{d\rho}\left[\pi\cot\left(\rho+\frac{p}{2}\right)\pi\right] = 1 - M_{11}\left(\frac{\pi}{\sin\left(\rho+\frac{p}{2}\right)\pi}\right)^2;$$

d'après ce que nous avons vu dans le n° 28, chacune des fonctions $\Omega^{(2k)}$ prendra la forme

$$\Omega^{(2k)} = - M_{11}^{(2k)} \left(\frac{\pi}{\sin \left(\rho + \frac{\nu}{2} \right) \pi} \right)^2,$$

$M_{11}^{(2k)}$ désignant le produit de $(\alpha\gamma)^k$ par un polynôme en π à coefficients rationnels. Donc M_{11} se représentera par une série de la forme

$$M_{11} = R_1 \alpha\gamma + R_2 (\alpha\gamma)^2 + \ldots + R_k (\alpha\gamma)^k + \ldots$$

où les R_k sont des polynômes en π dont les coefficients sont des nombres rationnels.

Dans tous les deux cas, le déterminant $D(\rho)$ s'obtiendra par la formule

$$D(\rho) = - \frac{\sin (\rho - \rho_1)\pi}{\pi} \frac{\sin (\rho + \rho_1)\pi}{\pi} \Omega(\rho).$$

Ajoutons que les formules précédentes mettent en évidence ce fait que les invariants de l'équation (43), considérés comme fonctions des paramètres α, β, γ, ne dépendent que de β et du produit $\alpha\gamma$.

Une partie des recherches qui ont fait l'objet de ce mémoire, a été publiée auparavant dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Suède (Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, 1890).

Sophie Kovalevsky

Ljustryck af V. Wolfenstein f. d. J. Jaeger, Stockholm.

SUR LA POLARISATION PAR DIFFRACTION

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

I.

On sait à quelles discussions a donné lieu la question de savoir si la vibration lumineuse est perpendiculaire au plan de polarisation comme le veut FRESNEL, ou parallèle comme le pense NEUMANN. Une discussion de même nature a été soulevée depuis que la théorie électromagnétique semble, aux yeux de beaucoup de savants, devoir remplacer la théorie élastique. On s'est demandé si la force électrique est perpendiculaire au plan de polarisation et la force magnétique parallèle à ce plan, ou si c'est le contraire. Cette seconde question semble aujourd'hui à peu près résolue et on est d'accord pour admettre la première hypothèse. Mais si l'on conserve la théorie élastique, la question de la direction de la vibration lumineuse reste sans solution certaine.

On a espéré quelque temps trouver cette solution dans l'étude des phénomènes de polarisation par diffraction. Une application, que je crois erronée, du principe de HUYGHENS avait fait croire à presque tous les physiciens que le plan perpendiculaire à la vibration devait par la diffraction, se rapprocher du plan de diffraction. L'hypothèse de FRESNEL serait donc vérifiée si le plan de polarisation se rapprochait du plan de diffraction.

Les résultats des expériences furent contradictoires, ce qu'on expliqua par la complexité des phénomènes; il se produit sur les réseaux, une réflexion ou une réfraction, dont les effets viennent compliquer ou même masquer l'action exercée par la diffraction sur le plan de polarisation.

Je crois que ce n'est pas là la principale cause de l'insuccès de ces tentatives. Le principe de HUYGHENS a donné lieu à de nombreuses objections et elles n'ont été complètement réfutées que par KIRCHHOFF qui a donné à ce principe sa forme définitive. Sous cette forme, ce principe est une conséquence des équations fondamentales. Or, ces équations sont les mêmes pour le vecteur qui dans le langage de la théorie électromagnétique s'appellerait force électrique et pour celui qui s'appellerait force magnétique. Le principe de HUYGHENS est donc vrai pour l'un et l'autre vecteur. Si donc l'application qu'on en a voulu faire était légitime, elle le serait pour les deux vecteurs, et non pas seulement pour celui qui représente en grandeur, direction et sens la vibration lumineuse. Les plans normaux à ces deux vecteurs devraient donc l'un et l'autre se rapprocher du plan de diffraction, ce qui est impossible puisque ces deux plans normaux sont rectangulaires. Cela seul devrait suffire pour nous avertir de l'insuffisance de la théorie adoptée; mais une analyse plus complète confirme cette première impression; pour faire passer le principe de HUYGHENS de la forme que lui donne KIRCHHOFF à celle que lui donnait FRESNEL il faut négliger certains termes. Cela était légitime dans les cas où FRESNEL l'a fait, cela ne l'est plus si le réseau est très serré et la déviation grande ce qui est nécessaire pour qu'on puisse observer la rotation du plan de polarisation. On doit donc renoncer à tout espoir de résoudre de cette manière la question de savoir si la vibration lumineuse est perpendiculaire ou parallèle au plan de polarisation, ou ce qui revient au même si elle est représentée par le vecteur que la théorie électromagnétique appelle force électrique ou par celui qu'elle appelle force magnétique.

On n'en était pas encore tout à fait convaincu quand M. FIZEAU publia dans le tome 52 des *Comptes rendus de l'Académie des sciences* les résultats d'un grand nombre d'expériences intéressantes sur certains phénomènes très-curieux. L'illustre physicien observa en effet que la lumière réfléchie régulièrement ou irrégulièrement sur des stries très fines tracées à la surface d'un métal, de même que la lumière transmise à travers une fente très fine à parois métalliques, présente une polarisation souvent notable et tantôt perpendiculaire, tantôt parallèle à la direction des stries ou de la fente. Dans le mémoire que je viens de citer il donna une explication générale de ces phénomènes, qu'il attribua à l'interférence des rayons réfléchies avec ceux qui n'ont pas subi de réflexion. J'avertis tout de suite que le présent travail n'est que la développement analytique dans un cas très particulier de l'explication de M. Fizeau. Une vingtaine d'années après M. Gouy a observé des phénomènes de polarisation par diffraction qui se rattachent évidemment aux précédents, mais qui sont beaucoup moins complexes et il est arrivé ainsi à formuler plusieurs lois simples dont je rappellerai plus loin l'énoncé. Ses recherches sont décrites en détail dans le Tome 8, 6e série des Annales de physique et de chimie et dans les Comptes rendus de l'Academie des sciences (12 mars 1883, 1884 et 1885). Les expériences ont été tout récemment reprises et complètées par M. Hurmuzescu (Comptes rendus, 1er semestre 1892).

C'est à l'explication des phénomènes observés par M. Gouy que je consacrerai exclusivement ce qui va suivre; mais bien que les circonstances soient beaucoup moins compliquées que dans les expériences de M. Fizeau, je ne pouvais songer à aborder le problème dans toute sa généralité et j'ai dû me restreindre à un cas extrêmement particulier; me bornant ensuite dans les deux paragraphes V et VI à indiquer par des aperçus plus ou moins grossiers, dans quel sens les diverses circonstances que j'avais d'abord négligées pouvait modifier les résultats. J'ai l'intention d'y revenir plus tard dans une seconde partie de ce travail et d'étudier l'influence de ces circonstances par une analyse plus complète et plus rigoureuse.

J'aurais même à peine osé publier des résultats aussi incomplets si je n'y avais été encouragé par la phrase suivante qui se trouve dans le mémoire de M. Fizeau cité plus haut: »tout au plus peut-on espérer qu'en appliquant le calcul à quelques cas théoriques plus simples, on arriverait à des déductions rigoureuses qui pourraient éclairer la question».

J'ai trouvé plus commode d'employer le langage de la théorie électromagnétique; mais il ne faut pas s'y tromper; il ne faut pas croire que les faits s'expliquent dans la théorie de Maxwell et ne s'expliquent pas dans la théorie élastique. Les équations sont exactement les mêmes dans les deux théories et si l'une rend bien compte des faits il en est certainement de même de l'autre.

J'ai désigné par X, Y, Z les composantes de la force électrique qui d'après Fresnel représente en grandeur direction et sens la vibration lumineuse; j'ai désigné à l'exemple de MAXWELL par α, β, γ les composantes de la force magnétique qui d'après NEUMANN représenterait cette même vibration.

Dans toutes les applications que j'ai faites, j'ai pris pour axe des z la direction de celle de ces deux forces que je considérais. Deux des composantes sont alors nulles et j'ai pu employer les lettres α et β pour représenter d'autres quantités.

Si la lumière est homogène on a:

$$Z = Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt$$

ou

$$Z = \text{partie réelle } (Z_0 - iZ_1)e^{ipt},$$

Z est ainsi la partie réelle d'une exponentielle imaginaire, et cette exponentielle comme il est aisé de le voir satisfait aux mêmes équations que Z.

Pour cette raison, il me sera quelquefois commode, comme on le fait souvent, de désigner par Z, non pas la force électrique, c'est à dire la partie réelle de l'exponentielle, mais l'exponentielle elle-même. Afin d'éviter toute confusion je previens tout de suite que dans les §§ III et IV c'est la partie réelle de l'exponentielle que je désigne par Z et que dans les §§ V et VI c'est l'exponentielle imaginaire elle-même. De même pour γ.

J'emploierai aussi une notation qui est souvent usitée. Soit S une surface quelconque, M un point de cette surface, MN la normale à cette surface M' un point de cette normale infiniment voisin de M; je désignerai par dn la longueur MM'. Soit ensuite $F(x, y, z)$ une fonction quelconque; F_0 la valeur de cette fonction au point M. Je désignerai par

$$F_0 + \frac{dF}{dn} dn$$

la valeur de cette même fonction au point M', et le rapport $\frac{dF}{dn}$ s'appellera la dérivée de la fonction F estimée suivant la normale à la surface S.

II.

Rappelons d'abord succinctement les résultats obtenus par M. Gouy et qu'il s'agit d'expliquer. Ce physicien se sert d'un écran métallique formé d'une sorte de biseau très aigu, et il concentre la lumière à l'aide d'une lentille sur l'arête de ce biseau. Il observe ensuite la lumière diffractée à l'aide d'un microscope de faible grossissement pointé sur cette même arête.

Dans ces conditions la lumière diffractée est sensible dans une direction quelconque et on peut observer des rayons qui ont subi des déviations considérables pouvant aller jusqu'à 160°. M. Gouy a découvert de la sorte les lois suivantes:

1°. A l'intérieur de l'ombre géométrique, la lumière est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction. Cette polarisation est d'autant plus marquée qu'on se rapproche davantage de l'écran, c'est à dire que la déviation est plus grande, et peut devenir presque complète.

2°. A l'extérieur de l'ombre géométrique la lumière est polarisée au contraire dans le plan de diffraction. La polarisation nulle quand la déviation est très petite, atteint son maximum vers 30° ou 40°; dans de bonnes conditions elle peut être alors presque complète; elle décroit ensuite lentement, mais elle est encore notable pour une déviation de 160°.

3°. Pour une même déviation, la lumière diffractée est maximum quand le faisceau incident et le faisceau diffracté font des angles égaux avec l'écran.

4°. Quand les bords sont très tranchants et que la lumière incidente est naturelle, la quantité de lumière diffractée est la même pour une même déviation que cette déviation ait lieu vers l'intérieur ou vers l'extérieur.

5°. A l'intérieur de l'ombre géométrique, la lumière polarisée perpendiculairement au plan de diffraction est en général fortement colorée tandis que la lumière polarisée dans le plan de diffraction reste blanche.

6°. Si la lumière incidente et polarisée dans un plan oblique au plan de diffraction on peut la décomposer en deux composantes; l'une polarisée dans le plan de diffraction et l'autre perpendiculairement à ce plan; et ces deux composantes éprouvent dans la diffraction une différence de marche qui croît avec la déviation (à l'intérieur de l'ombre géométrique) reste bien inférieure à $\frac{\lambda}{4}$ si le tranchant est très fin, mais peut approcher de $\frac{\lambda}{2}$ avec des bords arrondis; c'est la composante polarisée dans le plan de diffraction (c'est à dire la composante blanche et faible) qui prend l'avance.

A l'extérieur de l'ombre géométrique cette différence de marche est de même sens que celle que produirait la réflexion mais plus petite à déviation égale.

Tels sont les faits dont nous avons à rendre compte; il ne serait pas facile de mettre en équations toutes les données d'un problème aussi complexe et de les résoudre ensuite, si l'on ne cherchait à diviser la difficulté.

Je traiterai donc d'abord une question beaucoup plus simple.

Je supposerai que les ondes incidentes sont cylindriques, les génératrices du cylindre étant parallèles au tranchant du biseau; il en résulte alors évidemment qu'il en sera de même des ondes diffractées. On réaliserait ce cas en concentrant la lumière sur le bord de l'écran non plus avec une lentille sphèrique, mais avec une lentille cylindrique. Supposons alors qu'on prenne le bord de l'écran comme axe des z; les diverses quantités que nous aurons à considérer, c'est à dire les composantes du déplacement d'une molécule d'éther dans la théorie élastique ou les composantes de la force électrique ou de la force magnétique dans la théorie électromagnétique) seront alors des fonctions de x, de y et du temps t, mais ne dépendront pas de z.

Si la lumière incidente est polarisée dans le plan de diffraction, il en sera de même de la lumière diffractée, et comme la force électrique est perpendiculaire au plan de polarisation, elle devra être parallèle à l'axe des z. Appelons alors Z cette force électrique, elle devra satisfaire à l'équation:

$$V^2\left(\frac{d^2Z}{dx^2}+\frac{d^2Z}{dy^2}\right)=\frac{d^2Z}{dt^2},$$

V désignant la vitesse de la lumière. L'intensité de la lumière est proportionnelle à Z^2 et il est facile de déduire de la connaissance de la fonction Z, celle des composantes de la force magnétique α et β; la troisième composante γ de cette force magnétique est toujours nulle.

Supposons maintenant au contraire que la lumière incidente soit polarisée perpendiculairement au plan de diffraction et qu'il en soit par conséquent de même de la lumière diffractée. Comme la force magnétique est parallèle au plan de polarisation, elle sera parallèle à l'axe des z. Si nous la désignons par γ elle satisfera à l'équation:

$$V^2\left(\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2}\right) = \frac{d^2\gamma}{dt^2},$$

l'intensité de la lumière sera proportionnelle à γ^2; et la connaissance de γ entraînera celle des composantes X et Y de la force électrique; la troisième composante Z étant toujours nulle.

La seconde simplification que j'introduirai étonnera sans doute davantage. Peut être plus d'un lecteur ne la trouvera-t-il légitime qu'après avoir lu le § V. On sait que vis à vis des oscillations hertziennes tous les métaux se comportent absolument de la même manière et par conséquent de la même façon que des conducteurs parfaits. En d'autres termes, au moins avec la précision assez faible que comportent les expériences, les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface des conducteurs. Au contraire vis à vis des oscillations lumineuses il n'en est plus rigoureusement de même, l'étude de la réflexion métallique nous l'apprend; la condition des métaux n'est plus tout à fait la même que celle d'un conducteur parfait; mais elle s'en rapproche d'autant plus que le pouvoir réflecteur est plus grand.

Eh bien, nous supposerons que *notre écran se comporte comme un conducteur parfait,* c'est à dire que les lignes de force électrique aboutissent normalement à la surface. Comment cette condition s'exprime-t-elle analytiquement?

Si la lumière est polarisée dans le plan de diffraction, la force électrique est parallèle à l'axe des z, parallèle par conséquent à la surface de l'écran qui est un cylindre dont les génératrices sont parallèles à cet axe; cette force n'a donc pas de composante normale à cette surface et comme d'après l'hypothèse que nous venons de faire elle ne doit pas avoir non plus de composante tangentielle, elle doit être nulle. On aura donc

$$Z = 0$$

à la surface de l'écran.

Si au contraire la lumière est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction, la force magnétique γ est parallèle à l'axe des z. Considérons un point de la surface de l'écran que nous prendrons pour un instant comme origine des coordonnées, pendant que l'axe des x sera la tangente à la section droite de l'écran cylindrique et l'axe des y la normale à cette section. Les dérivées par rapport au temps de la force électrique seront à un facteur constant près:

$$\frac{d\gamma}{dy}, \quad -\frac{d\gamma}{dx}, \quad 0.$$

La première de ces composantes devra être nulle, c'est à dire que la dérivée de γ estimée suivant la normale à l'écran devra être nulle. Nous écrirons donc, en renonçant aux axes particuliers que nous avions choisis pour un instant

$$\frac{d\gamma}{dn} = 0.$$

Cette égalité aura lieu en tous les points de la surface de l'écran, et on en voit aisément la signification. Si M est un point de cette surface, γ la valeur de la force magnétique en ce point, si M' est un point infiniment voisin, tel que MM' soit normale à la surface la valeur de la force magnétique au point M' sera

$$\gamma + \frac{d\gamma}{dn} MM'.$$

Comme troisième simplification je supposerai que le tranchant du biseau est parfait c'est à dire que la surface de l'écran se réduit à deux plans qui se coupent suivant l'axe des z, sous un angle très aigu.

Je simplifierai encore le problème en supposant que cet angle est infiniment petit. Enfin je supposerai que la lentille cylindrique qui concentre la lumière sur le bord de l'écran est parfaitement aplanétique et que sa ligne focale coïncide rigoureusement avec l'axe des z.

Réduit à ces termes, le problème est facile à résoudre et on peut déjà rendre compte des particularités les plus importantes découvertes par M. Gouy. Néanmoins on pourrait croire que les hypothèses très particulières que je viens de faire jouent un rôle essentiel et que les résultats seraient profondément modifiés si on les abandonnait. Ces hypothèses, je le rappelle sont au nombre de 5:

1°. L'angle du biseau est infiniment petit.

2°. Le tranchant du biseau est parfait.

3°. L'écran se comporte comme un conducteur parfait.

4°. La lentille convergente a sa ligne focale sur l'axe des z.

5°. Cette lentille est cylindrique.

Un examen plus approfondi est donc indispensable. Je vais par conséquent procéder de la façon suivante.

Je traiterai d'abord le problème complètement en admettant ces cinq hypothèses puis je les abandonnerai successivement et je verrai quelles modifications j'introduis ainsi dans les résultats.

Je les abandonnerai d'ailleurs dans l'ordre où je viens de les énoncer en dernier lieu.

III.

Rappelons d'abord les propriétés des fonctions de Bessel qui nous seront utiles dans la suite. Soit:

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left[1 - \frac{x^2}{2.2n} + \frac{x^4}{2.4.2n.2n+2} - \frac{x^6}{2.4.6.2n.2n+2.2n+4} + \ldots\right],$$

où n est un nombre entier, fractionnaire ou même incommensurable. On sait que $J_n x^{-n}$ est une fonction entière de x et que J_n satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d^2J_n}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dJ_n}{dx} + J_n\left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) = 0. \tag{1}$$

La fonction J_n n'est généralement pas réductible à des fonctions plus simples; il y a pourtant un cas où il en est ainsi, c'est quand $2n$ est un entier impair; il vient alors:

$$J_n = (-1)^{n-\frac{1}{2}} x^{n-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n-\frac{1}{2}} \cos x.$$

On voit ainsi que J_n est un polynôme entier en $\cos x$, $\sin x$ et $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

J'aurai besoin aussi de la valeur asymptotique de $J_n(x)$ pour x très grand. Cette valeur est:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Cela posé supposons d'abord la lumière polarisée dans le plan de diffraction.

Notre équation s'écrit alors:

$$V^2\left(\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2}\right) = \frac{d^2Z}{dt^2}.$$

Si nous supposons que la lumière soit homogène, c'est à dire que nous ayons

$$Z = Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt,$$

Z_0 et Z_1 ne dépendant que de x et de y, il viendra:

$$\frac{d^2Z}{dt^2} = -p^2Z;$$

si nous posons:

$$\alpha = \frac{p}{V}$$

notre équation devient:

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \alpha^2 Z = 0. \tag{2}$$

La longueur d'onde est alors égale à $\frac{2\pi}{\alpha}$.

Passons aux coordonnées polaires en posant:

$$x = \rho\cos\omega, \qquad y = \rho\sin\omega,$$

l'équation deviendra:

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2Z}{d\omega^2} + \alpha^2 Z = 0. \tag{3}$$

Si l'écran est un biseau parfait, les équations des deux plans qui limitent cet écran seront de la forme:

$$\omega = \omega_0, \qquad \omega = \omega_1.$$

Si nous supposons comme nous venons de le faire que l'angle du biseau est infiniment petit, ces équations pourront s'écrire:

$$\omega = 0, \qquad \omega = 2\pi.$$

Nous ferons varier ω de 0 à 2π; pour $\omega = 0$ et pour $\omega = 2\pi$, Z devra être nul; mais $\frac{dZ}{d\omega}$ pourra éprouver une discontinuité quand on franchira l'écran qui se trouve ici réduit à un plan. Au contraire s'il n'y avait pas d'écran, Z ne serait pas assujetti à s'annuler pour $\omega = 0$, mais ce serait une fonction périodique de ω de période 2π, qui serait continue ainsi que sa dérivée. Comment ces conditions se traduisent elles analytiquement.

S'il n'y avait pas d'écran, on pourrait écrire, en vertu de la formule de Fourier

$$Z = \Sigma P_n \cos n\omega + \Sigma P'_n \sin n\omega, \tag{4}$$

n étant un entier, P_n et P'_n des fonctions de ρ. Mais avec un écran nous devrons remplacer cette formule par la suivante:

$$Z = \sum P_n \sin\frac{n\omega}{2}, \tag{5}$$

n étant un entier et P_n une fonction de ρ et de t. Le développement (5) ne doit pas contenir de cosinus parce que Z doit s'annuler pour $\omega = 0$ et pour $\omega = 2\pi$. En revanche le développement (4) ne doit pas contenir de fonctions trigonométriques de $\frac{n\omega}{2}$ (n impair) parce que Z et $\frac{dZ}{d\omega}$ doivent être continues.

Adoptons donc le développement (5) et substituons le dans l'équation (3); nous aurons en égalant à o le coefficient de $\sin\frac{n\omega}{2}$:

$$\frac{d^2P_n}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dP_n}{d\rho} + P_n\left(\alpha^2 - \frac{n^2}{4\rho^2}\right) = 0$$

d'où puisque P_n doit rester fini pour $\rho = 0$:

$$P_n = A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho),$$

A_n étant une fonction de t. On a donc:

$$Z = \sum A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{2}$$

ou en remplaçant les fonctions de Bessel par leur valeur approchée, ce qui est permis dès que $\alpha\rho$ est très grand, c'est à dire dès que ρ est beaucoup plus grand que la longueur d'onde:

$$Z = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) \sin\frac{n\omega}{2}. \tag{6}$$

Rappelons que A_n doit être linéaire et homogène en $\cos pt$ et $\sin pt$.

Pour pousser plus loin cette étude, nous devons distinguer les diverses sortes de faisceaux lumineux dont la superposition produit le mouvement de l'éther représenté par l'équation (6).

Parmi ces faisceaux il y en a un qui se rapproche du bord de l'écran c'est à dire de l'axe des z, c'est le faisceau incident; les autres s'en éloignent; à savoir, le faisceau transmis directement, le faisceau réfléchi et le faisceaux diffractés. Le premier se rapprochant de l'écran, son équation peut s'écrire:

$$Z = \frac{f(\omega)}{\sqrt{\rho}} \cos(\alpha\rho + pt + h),$$

h étant une constante qui doit être indépendante de ω, si on suppose comme il n'y a peu d'inconvénient à le faire que la phase est la même en tous les points du faisceau. Nous pourrons alors choisir l'origine du temps de façon que cette constante soit égale à $-\frac{\pi}{4}$, ce qui nous permettra d'écrire:

$$Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \sin\frac{n\omega}{2}, \tag{7}$$

les B_n étant des constantes.

Les autres faisceaux qui s'éloignent de l'écran doivent avoir une équation de la forme:

$$Z = \frac{f_1(\omega)}{\sqrt{\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) + \frac{f_2(\omega)}{\sqrt{\rho}} \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)$$

ce qui peut s'écrire encore:

$$\begin{aligned} Z = & \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum C_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) \sin\frac{n\omega}{2} \\ & + \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum D_n \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) \sin\frac{n\omega}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

Le second membre de (6) doit être la somme des seconds membres de (7) et de (8). Si nous identifions en égalant les coefficients de

$$\cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin\frac{n\omega}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4}\right) \sin\frac{n\omega}{2},$$

nous obtiendrons:

$$\begin{aligned} A_n \cos\frac{n\pi}{4} &= B_n \cos pt + C_n \cos pt - D_n \sin pt, \\ A_n \sin\frac{n\pi}{4} &= -B_n \sin pt + C_n \sin pt + D_n \cos pt, \end{aligned}$$

d'où:

$$\left.\begin{array}{l} \text{si } n \equiv 0 \\ \text{si } n \equiv 1 \\ \text{si } n \equiv 2 \\ \text{si } n \equiv 3 \end{array}\right\} \bmod 4, \quad \begin{array}{ll} B_n = C_n, & D_n = 0, \\ B_n = D_n, & C_n = 0, \\ B_n = -C_n, & D_n = 0, \\ B_n = -D_n, & C_n = 0. \end{array} \tag{9}$$

C'est le faisceau incident qui nous est donné, nous connaissons donc B_n; les équations (9) nous permettent alors de calculer C_n et D_n et nous font ainsi connaître tous les éléments des faisceaux direct, réfléchi et diffractés.

Il est curieux de voir ce que donne ce même calcul quand on l'applique au cas où il n'y a pas d'écran. On a alors pour le mouvement total:

$$(6') \qquad Z = \Sigma(A_n^0 \cos n\omega + A_n^1 \sin n\omega) J_n(\alpha\rho)$$
$$= \Sigma(A_n^0 \cos n\omega + A_n^1 \sin n\omega) \sqrt{\frac{2}{\pi\alpha\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right),$$

pour le faisceau incident:

$$(7') \quad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right)(B_n^0 \cos n\omega + B_n^1 \sin n\omega) = f(\rho, \omega, t)$$

et pour l'ensemble des faisceaux transmis:

$$(8') \qquad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)(C_n^0 \cos n\omega + C_n^1 \sin n\omega)$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)(D_n^0 \cos n\omega + D_n^1 \sin n\omega) = f_1(\rho, \omega, t).$$

L'identification faite absolument de la même manière que plus haut nous donne alors:

$$(9') \quad \left.\begin{array}{r} \text{si } n \equiv 0 \\ n \equiv 1 \end{array}\right\} \text{mod } 2, \qquad \begin{array}{lll} C_n^0 = B_n^0, & C_n^1 = B_n^1, & D_n^0 = D_n^1 = 0, \\ C_n^0 = -B_n^0, & C_n^1 = -B_n^1, & D_n^0 = D_n^1 = 0 \end{array}$$

d'où:

$$f_1(\rho, \omega, t) = f(\rho, \omega + \pi, -t)$$

ce qui veut dire en somme qu'il n'y a pas d'autre faisceau transmis que le faisceau direct, c'est à dire qu'il n'y a ni réflexion, ni diffraction.

Revenons au cas où il y a un écran et cherchons à interpréter les équations (9). Supposons que le faisceau incident soit contenu entre les deux plans $\omega = \alpha$, $\omega = \beta$ et qu'entre ces deux plans son intensité soit constante, ou plutôt ne dépende que de ρ. Soit ensuite:

$$f(\omega) = \sum B_n \sin \frac{n\omega}{2}.$$

Alors $f(\omega)$ sera nulle, quand ω ne sera pas compris entre α et β, et sera constante égale à 1 par exemple, quand ω sera compris entre α et β. Si l'on observe alors que $f(\omega)$ change de signe avec ω et est une fonction périodique de période 4π, on en conclura:

$$f(\omega) = +1 \quad \text{si } 4k\pi + \alpha < \omega < 4k\pi + \beta;\ k \text{ entier},$$
$$f(\omega) = -1 \quad \text{si } 4k\pi - \beta < \omega < 4k\pi - \alpha;\ k \text{ entier},$$
$$f(\omega) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } \omega.$$

Soit ensuite:

$$f_1(\omega) = \Sigma B_{2n} \sin n\omega = \frac{f(\omega) + f(\omega + 2\pi)}{2};$$

on voit que $f_1(\omega)$ a pour période 2π et est égale à

$$+\frac{1}{2} \quad \text{si } \omega \text{ est compris entre } \quad 2k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad 2k\pi + \beta,$$
$$-\frac{1}{2} \quad \text{si } \omega \text{ est compris entre } \quad 2k\pi - \beta \quad \text{et} \quad 2k\pi - \alpha,$$
$$0 \quad \text{pour les autres valeurs de } \omega.$$

Posons de même:

$$f_2(\omega) = \sum B_{2n+1} \sin \frac{2n+1}{2}\omega = \frac{f(\omega) - f(\omega + 2\pi)}{2}.$$

Il résulte de cette définition:

1° que $$f_2(\omega) = -f_2(\omega + 2\pi),$$

2° que $f_2(\omega)$ est égale à

$$+\frac{1}{2} \quad \text{si } \omega \text{ est compris entre}$$

$$4k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad 4k\pi + \beta \quad \text{ou entre} \quad (4k+2)\pi - \beta \quad \text{et} \quad (4k+2)\pi - \alpha,$$

$$-\frac{1}{2} \quad \text{si } \omega \text{ est compris entre}$$

$$4k\pi - \beta \quad \text{et} \quad 4k\pi - \alpha \quad \text{ou entre} \quad (4k+2)\pi + \alpha \quad \text{et} \quad (4k+2)\pi + \beta,$$

$$0 \quad \text{pour les autres valeurs de } \omega.$$

Posons alors:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\omega) = \sin\omega + \frac{\sin 3\omega}{3} + \frac{\sin 5\omega}{3} + \ldots$$

de telle sorte que $\varphi(\omega)$ soit égale à

$+\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $2k\pi$ et $(2k+1)\pi$,

$-\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $(2k+1)\pi$ et $(2k+2)\pi$

on aura alors

$$2f_2(\omega) = \varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) + \varphi\left(\frac{\omega+\beta}{2} - \pi\right) - \varphi\left(\frac{\omega+\alpha}{2} - \pi\right).$$

Posons maintenant:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \psi_1(\omega) &= \sum C_n \sin\frac{n\omega}{2} = \Sigma B_{2n}(-1)^n \sin n\omega, \\ \psi_2(\omega) &= \sum D_n \sin\frac{n\omega}{2} = \Sigma B_{2n+1}(-1)^n \sin\frac{(2n+1)\omega}{2} \end{aligned}$$

l'équation (6) qui exprime le mouvement total de l'éther pourra s'écrire

$$(11) \qquad Z\sqrt{\frac{\pi\alpha\rho}{2}} = f_1(\omega)\cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right)$$

$$+ \psi_1(\omega)\cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) + \psi_2(\omega)\sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right).$$

La première équation (10) nous montre que

$$\psi_1(\omega) = f_1(\omega + \pi)$$

et par conséquent est égale à

$+\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $\pi+\alpha$ et $\pi+\beta$ (faisceau direct),

$-\frac{1}{2}$ pour ω compris entre $\pi-\beta$ et $\pi-\alpha$ (faisceau réfléchi),

0 pour les autres valeurs de ω (ω variant de 0 à 2π).

On voit ainsi que dans le second membre de (11), le premier terme correspond au faisceau incident, le second aux faisceaux direct et réfléchi et que le troisième terme qui reste correspondra aux faisceaux diffractés.

Nous sommes donc amenés à calculer la fonction $\psi_2(\omega)$; car l'intensité de la lumière diffractée sera proportionnelle au carré de cette fonction.

Rappelons le développement connu:

$$\frac{1}{2}\log\frac{1+e^{i\omega}}{1-e^{i\omega}}=\frac{e^{i\omega}}{1}+\frac{e^{3i\omega}}{3}+\frac{e^{5i\omega}}{5}+\ldots.$$

En égalant les parties imaginaires on trouve:

$$\frac{\pi}{2}\varphi(\omega)=\frac{\sin\omega}{1}+\frac{\sin 3\omega}{3}+\ldots$$

et en égalant les parties réelles

$$\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\right|=\frac{\cos\omega}{1}+\frac{\cos 3\omega}{3}+\frac{\cos 5\omega}{5}+\ldots.$$

Changeant ω en $\omega+\frac{\pi}{2}$, il vient:

$$\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{cotg}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|=-\frac{\sin\omega}{1}+\frac{\sin 3\omega}{3}-\frac{\sin 5\omega}{5}+\ldots$$

ou enfin

$$\frac{\pi}{2}\varphi_1(\omega)=\frac{1}{2}\log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|=\frac{\sin\omega}{1}-\frac{\sin 3\omega}{3}+\frac{\sin 5\omega}{5}-\ldots$$

en sorte que pour passer de $\varphi(\omega)$ à $\varphi_1(\omega)$ il suffit de changer le signe du coefficient de $\sin(4n+3)\omega$.

Il en résulte qu'on passera de $\varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right)$ à $\varphi_1\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right)$ en changeant le signe du coefficient de $\sin\frac{4n+3}{2}\omega$ ou de $\cos\frac{4n+3}{2}\omega$.

De même pour passer de $f_2(\omega)$ à $\psi_2(\omega)$, il suffit de changer le signe du coefficient de $\sin\frac{4n+3}{2}\omega$. Or, on a:

$$2f_2(\omega)=\varphi\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right)-\varphi\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right)+\varphi\left(\frac{\omega+\beta}{2}-\pi\right)-\varphi\left(\frac{\omega+\alpha}{2}-\pi\right).$$

On aura par conséquent:

$$2\psi_2(\omega) = \varphi_1\left(\frac{\omega-\alpha}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega-\beta}{2}\right) + \varphi_1\left(\frac{\omega+\beta}{2}-\pi\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega+\alpha}{2}-\pi\right)$$

ou enfin:

$$\psi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{\omega-\alpha+\pi}{4}\,.\operatorname{tg}\frac{\omega+\beta-\pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\omega-\beta+\pi}{4}\,.\operatorname{tg}\frac{\omega+\alpha-\pi}{4}}\right|. \tag{12}$$

Telle est l'expression de la racine carrée de l'intensité de la lumière diffractée. Une chose nous frappera d'abord; c'est que cette expression peut devenir infinie. Elle le devient en effet pour les valeurs suivantes de ω,

$$\omega = \alpha + \pi, \qquad \omega = \beta + \pi, \qquad \omega = \pi - \alpha, \qquad \omega = \pi - \beta,$$

c'est à dire sur les bords du faisceau direct et du faisceau réfléchi. Cette circonstance pourrait d'abord provoquer des doutes.

En premier lieu au point de vue purement analytique; nous avons été amenés à plusieurs reprises à supposer que la fonction Z restait finie; et si à la fin du calcul, nous trouvons un résultat contradictoire avec cette hypothèse, on peut se demander si tout notre échafaudage de raisonnements ne s'écroule pas; on sera rassuré si l'on observe que l'équation (11) n'est qu'approchée et qu'on l'obtient en remplaçant les fonctions de Bessel par leur valeur approchée; or cela n'est permis que si ρ est infini; pour toutes les valeurs finies de ρ, l'expression exacte de Z demeure finie.

Ensuite au point de vue physique, ce résultat n'est pas conforme aux observations. Il est vrai que comme on observe à l'aide d'un microscope, l'objectif de ce microscope a forcément une certaine ouverture et serait vu de l'axe des z sous une angle fini; de sorte que la racine carrée de l'intensité observée, n'est pas $\psi_2(\omega)$, mais:

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1}\psi_2(\omega)d\omega.$$

Or cette intégrale est évidemment toujours finie; la différence $\omega_1 - \omega_0$

était relativement assez grande, dans les expériences de M. Gouy elle était égale à $\beta - \alpha$.

Mais cette explication est insuffisante, ce résultat paradoxal tient aux hypothèses extrêmes que nous avons faites; nous nous en rendrons mieux compte dans les paragraphes suivants, quand nous abandonnerons successivement ces hypothèses. Mais dès maintenant je puis mettre en évidence l'effet d'une d'entre elles. Nous avons admis que l'intensité du faisceau incident était constante pour ω compris entre α et β et était nulle quand ω n'était pas compris entre ces limites. Il en résultait que $f(\omega)$ était une fonction discontinue; c'est ce qui n'arrivera pas dans la réalité; or il est aisé de voir par une analyse toute pareille à celle qui précède et sur laquelle nous reviendrons à la fin de ce paragraphe que si $f(\omega)$ est continu, $\psi_2(\omega)$ est fini.

Ne nous arrêtons donc pas pour le moment à cette difficulté; et appliquons la même méthode au cas où la lumière est polarisée dans un plan perpendiculaire au plan de diffraction. Nous devons alors satisfaire à l'équation:

$$\frac{d^2\gamma}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\gamma}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2\gamma}{d\omega^2} + \alpha^2\gamma = 0. \tag{3''}$$

Sur le bord de l'écran, c'est à dire pour

$$\omega = 0, \qquad \omega = 2\pi$$

on devra avoir:

$$\frac{d\gamma}{d\omega} = 0$$

de sorte que γ sera de la forme:

$$\gamma = \sum P_n \cos\frac{n\omega}{2}$$

P_n étant fonction de ρ et de t. On verrait comme plus haut que:

$$P_n = A_n J_{\frac{n}{2}}(\alpha\rho)$$

A_n dépendant seulement de t; d'où l'équation approchée analogue à (6)

$$\gamma = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{n+1}{4}\pi\right) \cos\frac{n\omega}{2}. \tag{6''}$$

Les équations (7) et (8) qui donnent l'expression de la lumière incidente et celle des lumières transmise directement, réfléchie et diffractée seront encore vraies ici avec cette différence que Z sera remplacé par γ et $\sin\frac{n\omega}{2}$ par $\cos\frac{n\omega}{2}$.

On aura donc:

$$\gamma = \sum B_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \cos\frac{n\omega}{2}, \tag{7''}$$

$$\gamma = \sum C_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\theta \cos\frac{n\omega}{2} + \sum D_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sin\theta \cos\frac{n\omega}{2} \tag{8''}$$

en posant pour abréger:

$$\theta = \alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt.$$

En identifiant le second membre de (6″) avec la somme des seconds membres de (7″) et de (8″) nous retrouverons les équations (9) qui sont donc encore vraies dans le cas qui nous occupe maintenant.

Posons encore

$$f(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n\omega}{2}.$$

La fonction $f(\omega)$ aura pour période 4π, elle ne changera pas quand ω se changera en $-\omega$; d'autre part ses valeurs entre 0 et 2π sont connues, elle est égale à 1 quand ω varie de α à β et à 0 pour les valeurs de ω comprises entre 0 et 2π et non comprises entre α et β. Nous aurons donc:

$$f(\omega) = 1 \quad \text{pour } \omega \text{ compris entre}$$

$$4k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad 4k\pi + \beta \quad \text{ou entre} \quad 4k\pi - \beta \quad \text{et} \quad 4k\pi - \alpha,$$

$$f(\omega) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } \omega.$$

Soit maintenant:

$$f_1(\omega) = \sum B_{2n} \cos n\omega = \frac{f(\omega) + f(\omega + 2\pi)}{2},$$

$$f_2(\omega) = \sum B_{2n+1} \cos\frac{(2n+1)\omega}{2} = \frac{f(\omega) - f(\omega + 2\pi)}{2}$$

il est clair que l'on aura:

$$f_2(\omega) = \frac{1}{2} \quad \text{pour } \omega \text{ compris entre}$$

$$4k\pi + \alpha \quad \text{et} \quad 4k\pi + \beta \quad \text{ou entre} \quad 4k\pi - \beta \quad \text{et} \quad 4k\pi - \alpha,$$

$$f_2(\omega) = -\frac{1}{2} \quad \text{pour } \omega \text{ compris entre}$$

$$(4k+2)\pi+\alpha \quad \text{et} \quad (4k+2)\pi+\beta \quad \text{ou entre} \quad (4k+2)\pi-\beta \quad \text{et} \quad (4k+2)\pi-\beta,$$

$$f_2(\omega) = 0 \quad \text{pour les autres valeurs de } \omega.$$

Cela peut s'exprimer par l'équation suivante:

$$2f_2(\omega) = \varphi\left(\frac{\omega - \alpha}{2}\right) - \varphi\left(\frac{\omega - \beta}{2}\right) - \varphi\left(\frac{\omega + \beta}{2} - \pi\right) + \varphi\left(\frac{\omega + \alpha}{2} - \pi\right).$$

Soit, comme plus haut:

$$\psi_1(\omega) = \sum C_n \cos\frac{n\omega}{2} = \Sigma B_{2n}(-1)^n \cos n\omega,$$

$$\psi_2(\omega) = \sum D_n \cos\frac{n\omega}{2} = \Sigma B_{2n+1}(-1)^n \cos\frac{2n+1}{2}\omega.$$

Nous aurons dans l'expression complète de γ un terme en $f(\omega)$ correspondant au faisceau incident, un terme en $\psi_1(\omega)$ correspondant aux faisceaux direct et réfléchi, un terme en $\psi_2(\omega)$ correspondant aux faisceaux diffractés. On voit d'abord que:

$$\psi_1(\omega) = f_1(\omega + \pi).$$

Quant à $\psi_2(\omega)$ on l'obtiendra en partant de $f_2(\omega)$ et en changeant le signe du coefficient de $\cos\frac{4n+3}{2}\omega$.

On trouvera ainsi:

$$2\psi_2(\omega) = \varphi_1\left(\frac{\omega - \alpha}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega - \beta}{2}\right) - \varphi_1\left(\frac{\omega + \beta}{2} - \pi\right) + \varphi_1\left(\frac{\omega + \alpha}{2} - \pi\right)$$

ou bien enfin:

$$\psi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \log \left| \frac{\operatorname{tg}\frac{\omega - \alpha + \pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\omega + \alpha - \pi}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\omega - \beta + \pi}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\omega + \beta - \pi}{4}} \right|.$$

Telle est l'expression de la racine carrée de l'intensité de la lumière diffractée. On voit que cette expression n'est pas la même suivant que la lumière est polarisée dans le plan de diffraction ou perpendiculairement à ce plan. Par conséquent si la lumière incidente est naturelle, la lumière diffractée sera polarisée.

Pour simplifier la discussion, supposons que α soit très peu différent de β et négligeons les termes en $(\beta - \alpha)^2$; il viendra pour les deux expressions de $\psi_2(\omega)$:

$$\frac{\beta - \alpha}{4\pi} \left| \frac{1}{\cos\frac{\omega - \alpha}{2}} - \frac{1}{\cos\frac{\omega + \alpha}{2}} \right| \quad \text{(polarisation parallèle au plan de diffraction),}$$

et

$$\frac{\beta - \alpha}{4\pi} \left| \frac{1}{\cos\frac{\omega - \alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\omega + \alpha}{2}} \right| \quad \text{(polarisation perpendiculaire au plan de diffraction).}$$

Les circonstances de la polarisation dépendront donc de la valeur du rapport:

$$\left| \frac{\frac{1}{\cos\frac{\omega - \alpha}{2}} - \frac{1}{\cos\frac{\omega + \alpha}{2}}}{\frac{1}{\cos\frac{\omega - \alpha}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{\omega + \alpha}{2}}} \right| = \left| \frac{\cos\frac{\omega + \alpha}{2} - \cos\frac{\omega - \alpha}{2}}{\cos\frac{\omega + \alpha}{2} + \cos\frac{\omega - \alpha}{2}} \right|.$$

Plus ce rapport s'éloignera de 1, plus la polarisation sera intense. S'il est plus grand que 1, le plan de polarisation sera parallèle au plan de diffraction; s'il est plus petit que 1 ces deux plans seront perpendiculaires.

La condition pour que le rapport soit plus grand que 1, c'est que ω soit compris entre $\alpha + \pi$ et $\pi - \alpha$, c'est à dire que le rayon diffracté soit compris entre le faisceau direct et le faisceau réfléchi. On aura donc:

entre l'écran et le faisceaux direct (diffraction intérieure) de la lumière polarisée perpendiculairement au plan de diffraction;

entre le faisceau direct et le faisceau réfléchi (diffraction extérieure) de la lumière polarisée parallèlement au plan de diffraction.

Ces résultats sont conformes à l'observation; les expériences n'ont pas porté sur le troisième cas où ω serait compris entre o et $\pi - \alpha$.

Pour $\omega = 2\pi$, le rapport s'annule, la polarisation est donc complète ce qui est encore conforme à l'observation. Pour $\omega = \pi$, le rapport devient infini et la polarisation devrait encore être complète; il est probable que le mélange des rayons réfléchis sur le bords qui sont toujours arrondis, s'oppose à ce qu'on puisse l'observer.

M. Gouy a observé que l'intensité totale de la lumière diffractée est maximum à déviation égale quand les axes optiques du collimateur et du microscope font des angles égaux avec l'écran. Notre formule donne un résultat contraire, l'intensité totale qui est proportionnelle à:

$$\frac{1}{\cos^2 \frac{\omega - \alpha}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega + \alpha}{2}}$$

est au contraire minimum quand les conditions que je viens d'énoncer sont remplies c'est à dire quand

$$\omega + \alpha = 2\pi.$$

Nous chercherons plus loin, quand nous abandonnerons successivement nos hypothèses simples, à expliquer cette divergence. Il ne sera pas inutile néanmoins de voir ce que deviennent nos formules quand on suppose $\omega + \alpha = 2\pi$. J'appellerai δ la déviation $\omega - \alpha - \pi$ qui sera positive à l'intérieure.

Je trouve alors que la racine carrée de l'intensité de la lumière diffractée est proportionnelle à

$$\left| \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} - 1 \right|$$

si le plan de polarisation est parallèle au plan de diffraction et à

$$\left| \frac{1}{\sin \frac{\delta}{2}} + 1 \right|$$

si ces deux plans sont perpendiculaires.

L'intensité totale sera proportionnelle à

$$1 + \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}.$$

Elle ne change donc pas quand on change δ en $-\delta$, ce qui est conforme à l'une des lois de M. Gouy, celle que nous avons énoncée plus haut sous le n° 4.

Nous rendrons donc compte déjà des principales circonstances observées par M. Gouy; mais en revanche il en est d'autres qui échappent à notre explication comme la coloration des rayons diffractées et la différence de marche entre les deux composantes (lois énoncées plus haut sous les n^{os} 5 et 6). Nous verrons dans les paragraphes suivants si nous pouvons en rendre compte.

J'ai dit plus haut que si la fonction $f(\omega)$ était continue, la fonction $\psi_2(\omega)$ ne deviendrait pas infinie; il est aisé de s'en assurer, on trouve en effet si $f(\omega)$ est nul pour $\omega = 2\pi$ et si l'on suppose par exemple que le plan de polarisation soit parallèle au plan de diffraction:

$$\psi_2(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{a=0}^{a=2\pi} f'(a) \log \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\omega - a + \pi}{4}}{\operatorname{tg} \frac{\omega + a - \pi}{4}} \right| da.$$

Il est clair que si $f'(\omega)$ est fini, cette intégrale ne pourra devenir infinie.

IV.

Voyons maintenant comment les résultats précédents sont modifiés quand on ne suppose plus que l'angle du biseau soit infiniment petit. Soit

$$\omega = 0, \qquad \omega = \lambda\pi$$

les deux plans qui limitent le biseau.

Supposons d'abord que le plan de polarisation soit parallèle au plan de diffraction Z qui doit s'annuler pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$ sera de la forme:

$$Z = \sum A_n J_{\frac{n}{\lambda}}(\alpha\rho) \sin\frac{n\omega}{\lambda}$$

en se bornant à la valeur approchée on retrouvera l'équation

$$(6) \qquad Z = \sum A_n \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2\lambda}\right) \sin\frac{n\omega}{\lambda}.$$

Soit

$$(7) \qquad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \sin\frac{n\omega}{\lambda}$$

l'équation du faisceau incident et

$$(8) \qquad Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum \sin\frac{n\omega}{\lambda}\left[C_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right) + D_n \sin\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt\right)\right].$$

celle des faisceaux qui s'éloignent de l'écran. On trouvera par un calcul tout pareil à celui du paragraphe précédent:

$$A_n \cos\frac{n\pi}{2\lambda} = \quad B_n \cos pt + C_n \cos pt - D_n \sin pt,$$

$$A_n \sin\frac{n\pi}{2\lambda} = - B_n \sin pt + C_n \sin pt + D_n \cos pt$$

d'où les équations

$$(9) \qquad \begin{aligned} C_n &= \cos\frac{n\pi}{\lambda} B_n, \\ D_n &= \sin\frac{n\pi}{\lambda} B_n. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir qu'en y faisant $\lambda = 2$, on retrouve les équations (9) du paragraphe précédent.

L'équation (8) devient alors:

$$Z = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \sin\frac{n\omega}{\lambda} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt - \frac{n\pi}{\lambda}\right).$$

Si nous posons alors comme dans le paragraphe précédent:

$$f(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n\omega}{\lambda}$$

fonction proportionnelle à la racine carrée de l'intensité du faisceau incident, nous aurons à calculer les fonctions

$$\psi_1(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n\pi}{\lambda}\sin\frac{n\omega}{\lambda},$$

$$\psi_2(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n\pi}{\lambda}\sin\frac{n\omega}{\lambda},$$

et l'intensité de la lumière transmise soit directement, soit par réflexion, soit par diffraction sera proportionnelle à:

$$\psi_1^2(\omega) + \psi_2^2(\omega).$$

Remarquons d'abord que la fonction $f(\omega)$ est périodique de période $2\lambda\pi$, qu'elle change de signe avec ω, et qu'elle est égale à 0 quand ω varie de 0 à α ou de β à $\lambda\pi$; et égale à 1 quand ω varie de α à β. La fonction $f(\omega)$ et par conséquent les coefficients B_n sont entièrement déterminés. Considérons alors la fonction suivante $\eta(z)$ de la variable imaginaire z; soit:

$$\eta(z) = \Sigma B_n z^n.$$

La fonction $\eta(z)$ est évidemment égale à:

$$\eta(z) = \frac{-1}{\pi}\log\frac{\left(z - e^{\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)}{\left(z - e^{\frac{i\beta}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\beta}{\lambda}}\right)}.$$

On vérifie en effet que la partie imaginaire de

$$\eta\left(e^{\frac{i\omega}{\lambda}}\right)$$

est bien égale à $f(\omega)$; je désignerai par $f_1(\omega)$ la partie réelle qui est évidemment égale à

$$f_1(\omega) = \frac{-1}{\pi}\log\left|\frac{\sin\frac{\omega-\alpha}{2\lambda}\cdot\sin\frac{\omega+\alpha}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega-\beta}{2\lambda}\cdot\sin\frac{\omega+\beta}{2\lambda}}\right| = \sum B_n \cos\frac{n\omega}{\lambda}.$$

Il vient ensuite:

$$2\psi_1(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n(\omega+\pi)}{\lambda} + \sum B_n \sin\frac{n(\omega-\pi)}{\lambda} = f(\omega+\pi) + f(\omega-\pi)$$

ce qui montre que le terme $\psi_1(\omega)$ correspond encore aux faisceaux direct et réfléchi à savoir le terme $f(\omega+\pi)$ au faisceau direct et le terme $f(\omega-\pi)$ au faisceau réfléchi. Quant au terme $\psi_2(\omega)$ il représentera comme dans le paragraphe précédent les faisceaux diffractés; étudions le de plus près.

Il vient:

$$2\psi_2(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n(\omega-\pi)}{\lambda} + \sum B_n \cos\frac{n(\omega+\pi)}{\lambda} = f_1(\omega-\pi) - f_1(\omega+\pi)$$

ou:

$$(10)\qquad \psi_2(\omega) = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{\sin\frac{\omega+\pi-\alpha}{2\lambda}.\sin\frac{\omega+\pi+\alpha}{2\lambda}.\sin\frac{\omega-\pi-\beta}{2\lambda}.\sin\frac{\omega-\pi+\beta}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega-\pi-\alpha}{2\lambda}.\sin\frac{\omega-\pi+\alpha}{2\lambda}.\sin\frac{\omega+\pi-\beta}{2\lambda}.\sin\frac{\omega+\pi+\beta}{2\lambda}}\right|.$$

On retrouverait la formule du paragraphe précédent en faisant $\lambda = 2$. Si nous supposons que la différence $\beta - \alpha$ soit infiniment petite, cette formule se simplifie un peu et on voit que $\psi_2(\omega)$ est égal à un facteur constant près à:

$$(11)\qquad \left|\frac{1}{\sin\frac{\omega+\pi-\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\omega-\pi-\alpha}{2\lambda}} - \frac{1}{\sin\frac{\omega+\pi+\alpha}{2\lambda}\sin\frac{\omega-\pi+\alpha}{2\lambda}}\right|.$$

Je ferai observer que les expressions (10) et (11) s'annulent pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$, c'est à dire sur le bord de l'écran; c'est le résultat auquel nous étions déjà parvenus dans le paragraphe précédent.

L'expression peut d'ailleurs s'écrire au facteur constant 2 près:

$$\left|\frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda} - \cos\frac{\omega-\alpha}{\lambda}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda} - \cos\frac{\omega+\alpha}{\lambda}}\right|.$$

Sous cette forme on voit aisément que les seules valeurs de ω pour lesquelles cette expression puisse s'annuler sont:

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega = \lambda\pi.$$

Passons maintenant au cas où la lumière est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction; on doit alors avoir:

$$\frac{d\gamma}{d\omega} = 0$$

pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$; il en résulte que γ sera de la forme:

$$\gamma = \sum A_n J_{\frac{n}{\lambda}}(\alpha\rho) \cos\frac{n\pi}{\lambda}$$

la partie de γ qui correspond au faisceau incident, sera si ρ est assez grand:

$$\gamma = \sum \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} B_n \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} + pt\right) \cos\frac{n\omega}{\lambda} \tag{7'}$$

et l'équation des faisceaux qui s'éloignent de l'écran sera:

$$\gamma = \sqrt{\frac{2}{\alpha\pi\rho}} \sum B_n \cos\frac{n\omega}{\lambda} \cos\left(\alpha\rho - \frac{\pi}{4} - pt - \frac{n\pi}{\lambda}\right).$$

Si alors nous posons, comme plus haut:

$$f(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n\omega}{\lambda},$$

$$\psi_1(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n\pi}{\lambda} \cos\frac{n\omega}{\lambda}, \qquad \psi_2(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n\pi}{\lambda} \cos\frac{n\omega}{\lambda},$$

la racine carrée de l'intensité de la lumière sera proportionnelle à

$f(\omega)$ pour le faisceau incident,

$\psi_1(\omega)$ pour les faisceaux direct et réfléchi,

$\psi_2(\omega)$ pour les faisceaux diffractés.

On trouve d'ailleurs:

$$2\psi_1(\omega) = \sum B_n \cos\frac{n(\omega + \pi)}{\lambda} + \sum B_n \cos\frac{n(\omega - \pi)}{\lambda} = f(\omega + \pi) + f(\omega - \pi)$$

ce qui montre que les propriétés des faisceaux direct et réfléchi sont les mêmes que dans le cas précédent.

Reste à étudier $\psi_2(\omega)$.

Si nous posons comme plus haut:

$$\eta(z) = \Sigma B_n z^n,$$

il viendra:

$$\eta(z) = \frac{i}{\pi} \log \frac{\left(z - e^{\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\beta}{\lambda}}\right)}{\left(z - e^{\frac{i\beta}{\lambda}}\right)\left(z - e^{-\frac{i\alpha}{\lambda}}\right)} + \frac{\alpha - \beta}{\pi\lambda}$$

car pour $z = e^{\frac{i\omega}{\lambda}}$ la partie réelle de $\eta(z)$ doit être égale à $f(\omega)$, c'est à dire à $+1$ pour ω compris entre α et β ou entre $-\beta$ et $-\alpha$, et à o pour toutes les autres valeurs de ω depuis $-\lambda\pi$, jusqu'à $+\lambda\pi$.

On aura alors:

$$\eta\left(e^{\frac{i\omega}{\lambda}}\right) = f(\omega) + i f_1(\omega)$$

en posant

$$f_1(\omega) = \frac{1}{\pi} \log \left| \frac{\sin\frac{\omega - \alpha}{2\lambda} \cdot \sin\frac{\omega + \beta}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega - \beta}{2\lambda} \cdot \sin\frac{\omega + \alpha}{2\lambda}} \right| = \sum B_n \sin\frac{n\omega}{\lambda}.$$

D'autre part:

$$2\psi_2(\omega) = \sum B_n \sin\frac{n(\omega + \pi)}{\lambda} - \sum B_n \sin\frac{n(\omega - \pi)}{\lambda} = f_1(\omega + \pi) - f_1(\omega - \pi)$$

d'où enfin:

$$\psi_2(\omega) = \frac{-1}{2\pi} \log \left| \frac{\sin\frac{\omega-\pi-\alpha}{2\lambda} \cdot \sin\frac{\omega+\pi-\beta}{2\lambda} \cdot \sin\frac{\omega-\pi+\beta}{2\lambda} \cdot \sin\frac{\omega+\pi+\alpha}{2\lambda}}{\sin\frac{\omega+\pi-\alpha}{2\lambda} \cdot \sin\frac{\omega-\pi-\beta}{2\lambda} \cdot \sin\frac{\omega+\pi+\beta}{2\lambda} \cdot \sin\frac{\omega-\pi+\alpha}{2\lambda}} \right|.$$

En faisant $\lambda = 2$ on retrouve la formule du paragraphe précédent; si nous supposons $\beta - \alpha$ très petit, cette formule se simplifie un peu et l'on trouve que $\psi_2(\omega)$ est égal à un facteur constant près à:

$$\left| \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda} - \cos\frac{\omega - \alpha}{\lambda}} + \frac{1}{\cos\frac{\pi}{\lambda} + \cos\frac{\omega + \alpha}{\lambda}} \right|.$$

Les circonstances de la polarisation dépendent alors de la valeur du rapport:

$$\left| \frac{\cos\frac{\omega - \alpha}{\lambda} - \cos\frac{\omega + \alpha}{\lambda}}{\cos\frac{\omega - \alpha}{\lambda} + \cos\frac{\omega + \alpha}{\lambda} - 2\cos\frac{\pi}{\lambda}} \right|.$$

Ce rapport s'annule pour $\omega = 0$ et pour $\omega = \lambda\pi$; il est plus petit que 1 pour $\omega > \alpha + \pi$ c'est à dire dans le cas de la diffraction intérieure; il est plus grand que 1 pour ω compris entre $\pi - \alpha$ et $\pi + \alpha$ c'est à dire dans le cas de la diffraction extérieure.

Les résultats sont donc absolument les mêmes que ceux du paragraphe précédent; nous rendrons compte des lois les plus importantes de la diffraction, mais il y a quelques circonstances que nous ne pouvons encore expliquer; c'est donc seulement dans les paragraphes suivants que nous pouvons espérer en trouver la clef.

V.

Nous aurons maintenant à tenir compte de ce fait que l'écran n'est pas formé d'un conducteur parfait, mais d'un métal et que la force électrique n'est par conséquent pas rigoureusement normale à la surface de cet écran.

Supposons d'abord que la lumière soit polarisée dans le plan de diffraction et voyons quelles sont les équations auxquelles nous devrons satisfaire.

Dans l'air, c'est à dire de $\omega = 0$ à $\omega = \lambda\pi$, nous aurons:

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2Z}{d\omega^2} + \alpha^2 Z = 0. \tag{1}$$

Pour pouvoir appliquer les formules de la réflexion métallique, nous emploierons la méthode des exponentielles imaginaires. Par hypothèse, la lumière étant homogène Z sera de la forme:

$$Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt$$

ce sera donc la partie réelle de

$$(Z_0 - iZ_1)e^{ipt}.$$

Cette quantité complexe satisfait aux mêmes équations que Z. C'est elle que nous appellerons Z, quitte à ne conserver à la fin du calcul que la partie réelle.

Dans le métal c'est à dire de $\omega = \lambda\pi$ à $\omega = 2\pi$, on aura:

$$\frac{d^2Z}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dZ}{d\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{d^2Z}{d\omega^2} + \beta^2 Z = 0 \tag{2}$$

β étant une constante complexe.

D'autre part Z et $\frac{dZ}{d\omega}$ doivent être continues quand on passe du métal à l'air et réciproquement, c'est à dire que les valeurs de ces deux quantités pour $\omega = \lambda\pi - \varepsilon$ doivent très peu différer des valeurs de ces deux quantités pour $\omega = \lambda\pi + \varepsilon$ et que leurs valeurs pour $\omega = 2\pi - \varepsilon$ doivent très peu différer de leurs valeurs pour $\omega = + \varepsilon$.

Tel est le résultat auquel conduisent toutes les théories de la réflexion métallique que nous n'avons pas à discuter ici. Le problème aussi posé est très compliqué, mais une circonstance permet de le simplifier; c'est que la lumière est éteinte à une profondeur excessivement faible au dessous de la surface du métal. Il en résulte que dans l'intérieur du métal, Z doit être représentée par une somme d'exponentielles où l'exposant est la distance du point considéré à la surface du métal, multipliée par un coefficient très grand et négatif. Pour mieux nous en rendre compte, rappelons ce qui se passe dans le cas simple et bien connu de la réflexion d'une onde plane sur une surface métallique plane. Il convient pour cela de revenir aux coordonnées rectangulaires, en prenant par exemple la surface du métal comme plan des yz, et le plan de polarisation coïncidant avec le plan d'incidence comme plan des xy. Nos équations deviennent alors:

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \alpha^2 Z = 0 \quad \text{dans l'air}$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \frac{d^2Z}{dy^2} + \beta^2 Z = 0 \quad \text{dans le métal,}$$

et à la surface de séparation Z et $\frac{dZ}{dx}$ devront être continues.

Soit φ l'angle d'incidence; il viendra:

$$\frac{d^2Z}{dy^2} = -\alpha^2 \sin^2\varphi Z$$

d'où:

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + \alpha^2 \cos^2\varphi Z = 0 \quad \text{dans l'air,}$$

$$\frac{d^2Z}{dx^2} + (\beta^2 - \alpha^2 \sin^2\varphi) Z = 0 \quad \text{dans le métal.}$$

Si donc nous faisons pour abréger:

$$\alpha^2 \sin^2\varphi - \beta^2 = \delta^2$$

en choisissant le signe de δ de telle façon que la partie réelle de δ soit positive, nous devrons avoir dans le métal:

$$Z = f(y)e^{\delta x} + f_1(y)e^{-\delta x}$$

comme la lumière doit s'éteindre dès que x a une valeur positive sensible (en supposant par exemple que le métal soit du côté des x positifs et l'air du côté des x négatifs) la première fonction de y, $f(y)$ doit être nulle et il restera:

$$Z = f_1(y)e^{-\delta x}$$

d'où:

$$\frac{dZ}{dx} = -\delta Z. \tag{3}$$

Comme Z et $\frac{dZ}{dx}$ sont continues, cette même relation (3) devra être encore vraie dans l'air dans le voisinage du plan de séparation $x = 0$. Telle est la condition aux limites à laquelle nous avons à satisfaire.

Pour un métal parfaitement conducteur, β et par conséquent δ sont très grands et la relation (3) se réduit à $Z = 0$, c'est à dire à la relation que nous avons admise dans le § III.

Passons maintenant au cas où le plan de polarisation est perpendiculaire au plan d'incidence et où par conséquent la force magnétique γ est parallèle à l'axe des z; nous retrouvons alors les deux équations:

$$\frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \alpha^2\gamma = 0, \qquad \frac{d^2\gamma}{dx^2} + \frac{d^2\gamma}{dy^2} + \beta^2\gamma = 0$$

d'où nous pourrons déduire encore que l'on a dans le métal

$$\gamma = f_1(y)e^{-\delta x}$$

et

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\delta\gamma.$$

Seulement ici les conditions aux limites ne sont plus les mêmes; γ doit être continu, mais il n'est pas de même de $\frac{d\gamma}{dx}$; si l'on considère deux points très voisins de la surface de séparation et de part et d'autre de cette surface, les valeurs de $\frac{d\gamma}{dx}$ en ces deux points, dans l'air et dans le métal seront entre elles comme α^2 est à β^2. Nous aurons donc dans l'air et dans le voisinage du plan $x = 0$:

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{\alpha^2\delta}{\beta^2}\gamma. \tag{4}$$

Si le métal est parfaitement conducteur et β très-grand, cette condition se réduit à

$$\frac{d\gamma}{dx} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\gamma}{dn} = 0$$

qui est celle que nous avons adoptée au § III.

Ces formules sont celles de la réflexion métallique; toutes les théories de cette réflexion, entre lesquelles nous n'avons pas à choisir, conduisent à des équations qui n'en diffèrent que par quelques termes très petits que nous pouvons négliger. Mais nous allons faire de ces formules un usage différent de celui qu'on en fait d'ordinaire. On s'en sert en effet pour comparer le rayon réfléchi au rayon incident. Soit par exemple, en supposant le rayon polarisé dans le plan d'incidence,

$$Z = \text{partie réelle de } Ae^{i(a\sin\varphi y - a\cos\varphi x + pt)} \tag{5}$$

l'équation du rayon incident et

$$Z = \text{partie réelle de } Be^{i(a\sin\varphi y + a\cos\varphi x + pt)} \tag{6}$$

celle du rayon réfléchi. Le rapport $\frac{B}{A}$ est une quantité imaginaire dont le carré du module représente le pouvoir réflecteur et dont l'argument représente la différence de phase entre le rayon réfléchi et le rayon incident. En substituant dans l'équation (3) et remarquant que la valeur totale de Z dans l'air doit être la somme des deux expressions (5) et (6) nous trouvons:

$$i(A - B)\alpha \cos\varphi = \partial(A + B). \tag{7}$$

En faisant le même calcul dans le cas où le rayon est polarisé perpendiculairement au plan d'incidence, c'est à dire en faisant la substitution non plus dans l'équation (3), mais dans l'équation (4) nous trouvons:

$$i(A - B)\beta^2 \cos\varphi = \partial\alpha(A + B). \tag{8}$$

On se sert ordinairement des équations (7) et (8) pour calculer le rapport $\frac{B}{A}$; nous allons au contraire nous en servir pour étudier le rapport

$$\frac{A+B}{A} = \eta.$$

L'étude de η nous fera ainsi connaître le rapport des amplitudes de la vibration totale en un point du plan des yz, et de la vibration partielle que l'on aurait en ce même point si le rayon incident existait seul; elle nous fera connaître également la différence de phase de ces deux vibrations; en d'autres termes elle nous renseignera sur les circonstances de l'interférence du rayon réfléchi avec le rayon incident.

Dans le cas extrême des métaux parfaitement conducteurs auxquels nous nous étions restreints dans les deux paragraphes précédents, β est infiniment grand et les deux équations (7) et (8) se réduisent respectivement à

$$A + B = 0, \qquad A - B = 0.$$

On a alors dans les deux cas

$$\left|\frac{B}{A}\right| = 1$$

ce qui veut dire que si le rayon incident est naturel, il en sera de même du rayon réfléchi.

Au contraire on a:

$$\left|\frac{A+B}{A}\right| = 0 \quad \text{dans le premier cas}$$

et

$$\left|\frac{A+B}{A}\right| = 2 \quad \text{dans le second cas}$$

de sorte que si l'on fait interférer les deux rayons et que l'on étudie la vibration dans le plan des yz lui-même, le rayon résultant de cette interférence sera complètement polarisé.

M. FIZEAU, dans le mémoire que nous avons cité plus haut, a déjà fait remarquer que deux rayons naturels peuvent par leur interférence produire un rayon polarisé, et c'est ainsi qu'il expliquait les phénomènes qu'il avait découverts et qui ont, comme nous l'avons dit, les plus grands rapports avec ceux dont nous nous occupons.

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons vu que dans le voisinage immédiat de la surface métallique la polarisation est complète; et cela tient, comme on pourra s'en assurer en revoyant le calcul, à ce que nous avons supposé que sur cette surface même la valeur totale de Z est nulle. Cette valeur totale est égale à $A + B$ dans le cas simple que nous venons de traiter et qui est celui de la réflexion d'une onde plane. On voit ainsi une analogie qui pourrait échapper au lecteur inattentif, mais qui n'en est pas moins profonde entre l'analyse des deux paragraphes précédents et l'explication de M. FIZEAU, fondée sur ce fait que l'interférence des deux rayons produit une polarisation beaucoup plus complète que la simple réflexion.

Revenons au cas des métaux ordinaires à pouvoir réflecteur considerable pour lesquels β est très grand, sans être infini. Appelons η et η' les valeurs du rapport $\frac{A+B}{A}$ tirées respectivement des équations (7) et (8). Il viendra:

$$\eta = \frac{2i\alpha\cos\varphi}{i\alpha\cos\varphi + \delta}, \qquad \eta' = \frac{2i\alpha\cos\varphi}{i\alpha\cos\varphi + \frac{\delta\alpha^2}{\beta^2}}.$$

L'intensité de la polarisation, c'est à dire le rapport des intensités des deux composantes principales, est mesurée par le rapport

$$\left|\frac{\eta'^2}{\eta^2}\right|.$$

Ce rapport sous une incidence voisine de l'incidence rasante peut devenir égal à $\left|\frac{\beta^4}{\alpha^4}\right|$ c'est à dire plus grand que la 4^e puissance du coefficient d'absorption.

Ajoutons que l'argument de η varie plus rapidement avec φ que celui de η'; et rappelons que cet argument de η représente la différence de phase entre la vibration résultant de l'interférence des rayons incident et réfléchi et la vibration incidente.

Dans les expériences de M. Gouy, on se trouve placé dans des conditions bien différentes puisque non-seulement l'onde incidente n'est pas plane, mais que la surface réfléchissante qui est celle du tranchant, loin d'être plane a un rayon de courbure très petit.

On conçoit néanmoins que les choses doivent se passer à peu près de même. En effet ce qu'il y a d'essentiel dans notre raisonnement subsiste. Si la force électrique Z est parallèle à l'axe des z, Z et $\frac{dZ}{dn}$ sont continus (j'appelle $\frac{dZ}{dn}$ comme je l'ai expliqué à la fin du § I la dérivée de Z estimée suivant la normale à la surface réfléchissante). Mais comme la lumière doit s'éteindre très rapidement dans l'intérieur du métal, le rapport de $\frac{dZ}{dn}$ à Z doit être très grand, dans le métal et par conséquent dans l'air; par conséquent Z est très petit.

Si au contraire c'est la force magnétique γ qui est parallèle à l'axe des z, γ est encore continu, mais $\frac{d\gamma}{dn}$ ne l'est plus. La valeur de $\frac{d\gamma}{dn}$ dans l'air est à celle de $\frac{d\gamma}{dn}$ dans le métal comme α^2 est à β^2. Le rapport de $\frac{d\gamma}{dn}$ à γ est encore très grand dans le métal et du même ordre de grandeur que β; mais dans l'air ce rapport est au contraire très petit et du même ordre de grandeur que $\frac{\alpha^2}{\beta}$ (quantité qui est petite si on prend une unité de longueur comparable à la longueur d'onde) et par conséquent $\frac{d\gamma}{dn}$ est très petit.

Je me contenterai de cet aperçu et ne tenterai pas d'évaluation numérique. Je me bornerai à dire que l'on doit se rapprocher des conditions de l'incidente rasante.

Comment maintenant vont varier dans les deux cas Z et γ à une distance finie de la surface métallique. C'est ce que va nous apprendre, l'application du principe de HUYGHENS sous la forme que lui a donnée KIRCHHOFF.

Soit S la surface de l'écran, S' celle d'un cylindre de révolution ayant pour axe l'axe des z et un rayon très grand. Soit $d\omega'$ un élément quelconque d'une de ces deux surfaces, x', y', z' les coordonnées du centre de gravité de cet élément. Soit x, y, z un point intérieur au volume limité par les deux surfaces S et S' et situé par conséquent dans l'air. Soit r la distance des deux points x, y, z et x', y', z'. Soit:

$$\varphi = \frac{e^{-iar}}{r}.$$

Nous avons vu qu'en supposant la lumière homogène la force électrique sera de la forme

$$Z_0 \cos pt + Z_1 \sin pt = \text{ partie réelle } (Z_0 - iZ_1)e^{ipt}.$$

Nous poserons:

$$Z = (Z_0 - iZ_1)e^{ipt}$$

de sorte que ce que nous désignerons par la lettre Z ce sera non pas la force électrique elle-même, mais une exponentielle imaginaire dont cette force électrique sera la partie réelle.

De même dans le cas où la force magnétique est parallèle à l'axe des z, cette force est la partie réelle d'une exponentielle de la forme

$$(\gamma_0 - i\gamma_1)e^{ipt}$$

et nous poserons:

$$\gamma = (\gamma_0 - i\gamma_1)e^{ipt}.$$

Nous conserverons les lettres Z et γ sans accent pour représenter les valeurs de ces fonctions au point x, y, z, et nous désignerons par Z' et γ' les valeurs de ces fonctions au point x', y', z'. Les notations

$$\frac{d\varphi}{dn}, \frac{dZ'}{dn}, \frac{d\gamma'}{dn}$$

représenteront les dérivées de φ, Z' et γ' éstimées suivant la normale à l'élément $d\omega'$.

Le principe de Huyghens-Kirchhoff nous donne alors:

$$(9) \qquad \begin{aligned} 4\pi Z &= \int \left(\varphi \frac{dZ'}{dn} - \frac{d\varphi}{dn} Z'\right) d\omega', \\ 4\pi\gamma &= \int \left(\varphi \frac{d\gamma'}{dn} - \frac{d\varphi}{dn} \gamma'\right) d\omega'. \end{aligned}$$

Les intégrales doivent être étendues aux deux surfaces S et S'.

On voit aisément:

1° que l'intégrale prise le long de S' ne dépend que du faisceau incident, et nullement des divers faisceaux divergents, ni par conséquent de la forme et de la nature de l'écran.

2° que l'intégrale prise le long des portions de l'écran qui ne sont pas très voisines du tranchant est négligeable.

Tout dépend donc de la valeur de l'intégrale prise le long des portions de S très voisines du tranchant.

Observons que α, avec nos unités habituelles de longueur est très grand de sorte que l'exponentielle $e^{-i\alpha r}$ qui entre en facteur dans φ varie très rapidement.

La quantité sous le signe $\int$ est donc de la forme

$$e^{-i\alpha r} F,$$

F étant une fonction de x, y et z qui varie beaucoup moins rapidement que cette exponentielle. Nous pouvons adopter pour définir la position du point x', y', z' sur la surface S tel système de coordonnées que nous voulons; nous prendrons par exemple la distance r de ce point au point x, y, z et la différence

$$z - z' = \zeta$$

et nous aurons:

$$d\omega' = Mdrd\zeta,$$

M étant une fonction de r et de ζ qui n'est pas très grande non plus que ses dérivées. L'intégration par parties nous donne alors

$$\int e^{-iar} Fd\omega' = \iint e^{-iar} FMdrd\zeta = \frac{-1}{ia} \int e^{-iar} PMd\zeta$$
$$+ \frac{1}{ia} \iint e^{-iar} \frac{dFM}{dr} drd\zeta.$$

La présence de α au dénominateur nous montre quelle est la condition pour que notre intégrale ne soit pas négligeable. C'est que F soit très grand de l'ordre de α.

Or φ est fini, tandis que $\frac{d\varphi}{dn}$ est de l'ordre de α. Le rapport de $\frac{dZ'}{dn}$ à Z' est de l'ordre de β. Le rapport des deux termes

$$\varphi \frac{dZ'}{dn} \quad \text{et} \quad Z' \frac{d\varphi}{dn}$$

est donc de l'ordre de $\frac{\beta}{\alpha}$. Si le pouvoir réflecteur du métal est très grand, ce rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ est très grand et tout se passe comme si Z' était nul.

D'autre part le rapport de $\frac{d\gamma'}{dn}$ à γ' est de l'ordre de $\frac{\alpha^2}{\beta}$. Le rapport des deux termes

$$\varphi \frac{d\gamma'}{dn} \quad \text{et} \quad \gamma' \frac{d\varphi}{dn}$$

est donc de l'ordre de $\frac{\alpha}{\beta}$ c'est à dire très petit si le métal est très réfléchissant.

Ainsi tout se passera à peu près comme si l'on avait

$$Z' = \frac{d\gamma'}{dn} = 0.$$

Or c'est là l'hypothèse que nous avons faite dans les §§ III et IV. Nous avons le droit d'en conclure que la polarisation sera dans le même sens que dans le cas où nous nous étions placés dans ces deux paragraphes.

L'aperçu qui précède est beaucoup trop grossier pour me permettre une comparaison numérique même approchée. Toutefois il semble que la polarisation observée est notablement plus forte que celle à laquelle conduiraient les valeurs de β ordinairement adoptées, bien que, la phase de Z' variant plus rapidement que celle de γ' d'un point à l'autre du tranchant, on puisse supposer que les différents termes de l'intégrale

$$\int Z' \frac{d\varphi}{dn} d\omega'$$

se détruisent par une sorte d'interférence, ce qui expliquerait au moins en partie l'intensité de la polarisation. Au surplus notre analyse est beaucoup trop imparfaite pour que de cette divergence on ait le droit de rien conclure contre les hypothèses d'où nous sommes partis, et qui sont généralement admises. Quoi qu'il en soit, on voit que nous nous rapprocherons d'autant plus des conditions des deux paragraphes précédents que le pouvoir réflecteur du métal sera plus considérable. La polarisation sera donc plus marquée pour les couleurs pour lesquelles ce pouvoir réflecteur est le plus grand, c'est à dire pour les couleurs qu'affecte la lumière réfléchie par ce métal. C'est sans doute pour cette raison que dans la composante la plus forte celle qui est polarisée perpendiculairement au plan de diffraction ce sont ces couleurs qui dominent. Il semble au contraire que dans la composante la plus faible, les couleurs complémentaires (pour lesquelles $\frac{\beta}{\alpha}$ est moins grand et pour lesquelles par conséquent la polarisation devrait être moins complète) devraient dominer à leur tour. Ce n'est pas tout à fait ce qui a été observé puisque cette composante paraît blanche. Peut être une cause secondaire vient-elle neutraliser cette coloration complémentaire de la composante faible et accentuer au contraire la coloration de la composante forte, c'est que les rayons qui dominent dans cette seconde composante sont en général de grande longueur d'onde et par conséquent plus diffrangibles que les autres. Tout cela n'est encore qu'un aperçu bien insuffisant et bien des détails restent inexpliqués.

VI.

Je me propose maintenant de tenir compte de ce fait que le tranchant du biseau n'est pas parfait, de telle façon que la surface S de l'écran se compose de deux faces planes raccordées par une sorte de cylindre de rayon très petit.

Si nous supposons de nouveau β infini et le métal parfaitement conducteur, de façon à ne pas accumuler toutes les difficultés à la fois, nous devrons avoir le long de la surface S

$$Z' = \frac{d\gamma'}{dn} = 0$$

de sorte que les équations de Huyghens-Kirchhoff se réduiront à:

$$4\pi Z = \int \varphi \frac{dZ'}{dn} d\omega', \tag{10}$$

$$-4\pi\gamma = \int \frac{d\varphi}{dn} \gamma' d\omega'. \tag{11}$$

En effet les intégrales des équations (9) du paragraphe précédent doivent être prises le long des surfaces S et S'. Le long de la surface S' elles sont, ainsi que nous l'avons vu, les mêmes que s'il n'y avait pas d'écran. Elles sont donc nulles, sauf à l'intérieur du faisceau directement transmis, et en dehors duquel nous nous supposerons placés. Le long de S, les termes en Z' et en $\frac{d\gamma'}{dn}$ sont nuls. Les équations (9) peuvent donc être remplacées par les équations (10) et (11).

Soit alors ψ l'angle que fait la normale à la surface S avec le rayon vecteur qui joint le point x, y, z au point x', y', z', il viendra:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dr} \cos\psi.$$

Si le point x', y', z' est voisin du tranchant mais situé cependant sur les faces planes du biseau, et si le point x, y, z est voisin de la surface S, c'est à dire si la déviation est grande et dirigée vers l'intérieur de l'ombre géométrique; l'angle ψ différera peu de 90° et $\cos\psi$ sera petit. Donc $\frac{d\varphi}{dn}$ sera petit. Il en résulte que les parties de l'intégrale du 2^d membre de (11) qui auront le plus d'influence sur la valeur de γ, seront celles qui appartiennent à la portion cylindrique du tranchant. Il n'en sera pas de même pour l'intégrale du 2^d membre de (10).

Peut-être peut-on s'expliquer de cette manière que la composante la plus forte et la plus colorée, soit plus affectée que l'autre par les irrégularités que ce tranchant peut présenter.

Mais le fait que le tranchant est plus ou moins arrondi peut avoir encore une autre influence dont nous nous rendrons grossièrement compte de la façon suivante:

Représentons nous la surface de l'écran comme prismatique et formée par exemple par les deux faces du biseau AB et CD et par une très-petite face plane BC faisant des angles égaux avec AB et CD.

Si la largeur de la face BC était nulle, nous retomberions sur le cas du § IV et la polarisation qui serait presque complète pour de grandes déviations, serait moins grande pour les déviations médiocres que ne l'indique l'observation.

Si la largeur de la face BC était très grande par rapport à la longueur d'onde on devrait se considérer comme étant en présence d'un biseau très ouvert BCD et on pourrait encore appliquer les formules du § IV. La polarisation serait complète quand le rayon diffracté serait parallèle à BC c'est à dire pour une déviation relativement faible, et pour des déviations plus grandes, il n'y aurait plus du tout de lumière diffractée.

Si la largeur de la face BC est petite sans être nulle, (ce qui se rapproche du cas qui est effectivement réalisé) on trouverait sans doute des résultats intermédiaires; est ce pour cette raison qu'on observe pour des déviations médiocres, moins de lumière et une polarisation plus intense que ne l'indiqueraient les formules du § IV? Ce qui tendrait à le faire croire, c'est que la polarisation croît d'autant plus vite avec la déviation que le tranchant du biseau est plus arrondi.

Nous avons dit plus haut que d'après l'observation la lumière diffractée est maximum à déviation égale quand le rayon incident et le rayon diffracté font des angles égaux avec l'écran. L'explication doit probablement, comme le fait très bien observer M. Gouy, être cherchée aussi dans la courbure du tranchant.

Les paragraphes V et VI où le problème abordé est beaucoup plus complexe que celui qui a été traité dans les paragraphes III et IV ne contiennent que des aperçus qui peuvent grossièrement nous faire prévoir le sens de certains phénomènes, mais qui sont dénués de toute précision. Une analyse plus rigoureuse serait donc nécessaire. Ce sera l'objet de la seconde partie de ce travail.

SUR LA GÉNÉRATION DE SYSTÈMES RÉCURRENTS AU MOYEN D'UNE ÉQUATION LINÉAIRE DIFFÉRENTIELLE

PAR

S. PINCHERLE

À BOLOGNE.

Le présent mémoire a pour objet principal la détermination du développement d'une fonction donnée en série ordonnée suivant les fonctions d'un système récurrent dont on connaît l'échelle de relation; mais pour arriver à ce résultat, je dois toucher à plusieurs autres questions, dont j'essaie de donner une idée dans le résumé qui suit.

Supposons donnée une équation linéaire récurrente entre $p + 1$ quantités qui dépendent d'un indice n; les coefficients de cette équation soient des polynômes entiers en n, du degré m. Une solution quelconque de cette équation aura pour fonction génératrice (au sens de LAPLACE) une intégrale d'une équation différentielle linéaire d'ordre m, dont le second membre sera, en général, un polynôme entier contenant m constantes arbitraires. A chaque détermination de ces constantes correspond une solution particulière de l'équation récurrente. En particulier, il existe une détermination spéciale des constantes, pour laquelle le système récurrent admet une série génératrice convergente dans un cercle qui est le plus grand possible: j'appelle ce système *l'intégrale distinguée* de l'équation récurrente, et par une méthode fondée sur la transformation que j'appelle de HEINE, je détermine cette intégrale distinguée. A côté de l'équation récurrente donnée il s'en présente une seconde que j'appelle *inverse* de la première, et dont les intégrales ont, avec celles de l'équation donnée, des relations remarquables. Supposons maintenant que, dans les coefficients de l'équation récurrente, il entre un paramètre x au premier degré; les intégrales de cette équation, ainsi que celles de son inverse, seront des fonctions de ce paramètre, et l'on demande s'il est possible, en général, de développer une fonction analytique donnée en série ordonnée selon les fonctions de ce système. On peut répondre affirmativement à cette demande; de plus, on arrive aisément à former les coefficients du développement en question et à en donner les conditions de convergence, au moyen de l'intégrale distinguée de l'équation inverse.

Je me permets d'insister sur l'importance que me semble présenter le concept d'intégrale distinguée d'une équation linéaire aux différences. Ce concept n'est autre, en effet, que la généralisation de celui de la fraction continue; car si l'on considère l'équation récurrente du second ordre

$$p_{n+1} = a_{n+1}p_n + b_{n+1}p_{n-1},$$

et si p'_n, p''_n sont les deux intégrales particulières distinctes pour lesquelles

$$p'_0 = 1, \qquad p'_1 = a_1; \qquad p''_0 = 0, \qquad p''_1 = 1,$$

l'intégrale générale a la forme

$$p_n = \lambda p'_n + \mu p''_n;$$

or, si l'on détermine λ et μ en sorte que la série $\Sigma p_n x^n$ converge dans le cercle le plus grand possible, p_n est *l'intégrale distinguée* de l'équation récurrente, et en même temps le rapport $-\mu:\lambda$ des constantes correspondantes est précisément la valeur de la fraction continue dont la réduite $n^{\text{ème}}$ est $\frac{p'_n}{p''_n}$. Le développement que j'obtiens dans ce mémoire peut donc être regardé comme la généralisation du développement d'une fonction donnée en série ordonnée suivant les dénominateurs des réduites d'une fraction continue algébrique donnée; développement qu'a donné HEINE,[1] sans toutefois en faire connaître les conditions de convergence.

Pour l'historique de la question que je traite dans ce travail, je dois ajouter que c'est M. POINCARÉ qui, le premier, a reconnu les diffé-

---

[1] *Handbuch der Kugelfunctionen*, Zweite Auflage, Bd. I, p. 293.

rentes manières d'aller à l'infini des intégrales d'une équation aux différences dont les coefficients sont des polynômes en n,[1] et c'est son travail qui m'a suggéré l'idée d'entreprendre la recherche de l'intégrale distinguée, que cet auteur doit sans doute avoir entrevue.

Équation linéaire aux différences finies.

1. Je prends comme point de départ une équation différentielle linéaire d'ordre m, à coefficients polynômes et de la forme:

$$\sum_{k=0}^{m}(a_{0.k}t^r + a_{1.k}t^{r-1} + \ldots + a_{r.k})t^k \frac{d^kU}{dt^k} = t^\mu R(t), \tag{1}$$

où r et μ sont des nombres entiers positifs et où $R(t)$ est un polynôme entier de degré $r - 1$. Pour abréger, j'indiquerai par Δ l'opération exécutée sur U dans le premier membre, en sorte que l'équation (1) pourra s'écrire

$$\Delta U = t^\mu R(t).$$

Je suppose les coefficients $a_{0.m}$ et $a_{r.m}$ essentiellement différents de zéro.

En même temps, je considère l'équation aux différences finies ou équation récurrente d'ordre r

$$a_r(n)p_{n+r} + a_{r-1}(n)p_{n+r-1} + \ldots + a_0(n)p_n = 0, \tag{2}$$

où l'on a posé

$$a_h(n) = a_{h.m}(n+h)_m + a_{h.m-1}(n+h)_{m-1} + \ldots + a_{h.1}(n+h)_1 + a_{h.0},$$

avec

$$h = 0, 1, 2, 3, \ldots, r,$$

et

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1),$$

et j'appelle l'équation (1) *équation génératrice* de l'équation (2).

---

[1] *Sur les équations linéaires aux différentielles* etc. American Journal of Mathematics, Vol. 7, p. 46.

2. En donnant des valeurs arbitraires à r consécutives des quantités p_n, par exemple à

$$p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+r-1},$$

on détermine, au moyen de l'équation (2), le système de ces quantités depuis $p_{\mu+r}$ jusqu'à l'infini, en supposant, comme nous le ferons désormais, que l'équation

$$a_r(n) = 0 \tag{3}$$

n'ait pas de racines entières. Chaque système récurrent p_n ainsi déterminé sera une intégrale particulière de l'équation (2), et au moyen de r intégrales particulières

$$p_{1.n}, p_{2.n}, \ldots, p_{r.n}$$

telles que le déterminant

$$\Sigma \pm p_{1.\mu} p_{2.\mu+1} \ldots p_{r.\mu+r-1}.$$

soit différent de zéro, toute autre intégrale pourra s'exprimer par la formule

$$p_n = \lambda_1 p_{1.n} + \lambda_2 p_{2.n} + \ldots + \lambda_r p_{r.n},$$

où les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ sont indépendantes de l'indice n.

3. Indiquons par U la série

$$U(t) = \sum_{n=\mu}^{\infty} p_n t^n$$

et par $U', U'', \ldots, U^{(m)}, \ldots$ ses dérivées. Selon une locution très employée jadis en analyse, notamment par Laplace, cette série pourra s'appeler la *fonction génératrice* du système p_n.

En multipliant le polynôme $a_h(n)$ par $p_{n+h} t^{n+h}$ et en sommant depuis $n = \mu$ jusqu'à l'infini, on obtient l'expression

$$a_{h.m} t^m U^{(m)} + a_{h.m-1} t^{m-1} U^{(m-1)} + \ldots + a_{h.0} U$$

$$-\{a_h(\mu-h) p_\mu + a_h(\mu-h+1) p_{\mu+1} t + \ldots + a_h(\mu-1) p_{\mu+h-1} t^{h-1}\} t^\mu.$$

Si donc on multiplie l'équation (2) par t^{n+r}, et si l'on somme ensuite depuis l'ndice μ jusqu'à l'infini, on obtient en appliquant l'expression précédente et en ordonnant convenablement:

$$(4)\qquad \sum_{k=0}^{m}(a_{0.k}t^r + a_{1.k}t^{r-1} + \ldots + a_{r.k})t^k U^{(k)}$$
$$= t^\mu \sum_{h=1}^{r} t^{r-h}[a_h(\mu - h)p_\mu + a_{h+1}(\mu - h)p_{\mu+1} + \ldots + a_r(\mu - h)p_{\mu+r-h}].$$

Nous obtenons ainsi une équation de la forme (1), ce qui justifie le nom que nous lui avons donné de génératrice de l'équation (2), puisque toute intégrale de l'équation (2) a pour fonction génératrice une intégrale de (1); et l'on voit que, réciproquement, toute intégrale de cette dernière équation développable en série de puissances de t, est la fonction génératrice d'une intégrale de (2).

Le second membre de l'équation (4) dépend linéairement des indéterminées $p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+r-1}$; son degré d'indétermination est donc le même que celui du système p_r. On peut d'ailleurs voir que si l'on se donne le second membre de l'équation (1) sous la forme

$$R(t) = b_1 t^{r-1} + b_2 t^{r-2} + \ldots + b_r$$

et que l'on identifie cette équation avec la (4), on a

$$(5)\qquad b_h = a_h(\mu - h)p_\mu + a_{h+1}(\mu - h)p_{\mu+1} + \ldots + a_r(\mu - h)p_{\mu+r-h}, \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots, r)$$

d'où l'on peut déduire sans ambiguité les valeurs de $p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+r-1}$. En effet, le déterminant du système (5) n'est autre que

$$a_r(\mu - 1)a_r(\mu - 2)\ldots a_r(\mu - r),$$

lequel n'est pas nul, d'aprés l'hypothèse que l'équation (3) n'a pas de racines entières.

4. Considérons maintenant l'équation linéaire sans second membre

$$(6)\qquad \Delta U = 0$$

dont les points singuliers sont, outre $t = 0$ et $t = \infty$, les racines de l'équation

$$(7)\qquad a_{0.m}t^r + a_{1.m}t^{r-1} + a_{2.m}t^{r-2} + \ldots + a_{r.m} = 0,$$

racines que j'indiquerai par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, en supposant

$$|\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq |\alpha_3| \ldots \leqq |\alpha_r|.$$

L'équation déterminante de (6) par rapport au point singulier $t = 0$ est

$$a_r(\rho - r) = 0;$$

or, cette équation n'ayant pas de racines entières, il s'ensuit que l'équation sans second membre (6) n'admet pas d'intégrale développable en série de puissances entières de la variable dans un domaine du point $t = 0$. Par conséquent, l'équation à second membre (1) aura une seule intégrale particulière développable en une série de cette forme

$$U = \Sigma p_n t^n$$

dans le domaine du point $t = 0$, dont le rayon de convergence sera l'un des modules $|\alpha_1|, |\alpha_2|, \ldots, |\alpha_r|$, et en général le plus petit. On a donc, suivant une notation souvent employée:

$$p_n \sim \frac{1}{|\alpha_i|^n}$$

et même

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{1}{\alpha_i},$$

où l'on doit supposer en général $i = 1$. Il peut cependant se faire que par un choix convenable des arbitraires $p_\mu, p_{\mu+1}, \ldots, p_{\mu+r-1}$ (ou par un choix convenable de $R(t)$, ce qui revient au même) on puisse avoir $i > 1$ et même $i = r$. Lorsque ce dernier cas se présente, la série $\Sigma p_n t^n$ est convergente dans le cercle le plus grand possible et je dis alors que le système p_n correspondant est *l'intégrale distinguée* de l'équation (2). Nous verrons bientôt comment on peut démontrer l'existence de cette intégrale et la déterminer.

La transformation de Heine.

5. Avant d'aller plus loin, il nous faut étudier une opération fonctionnelle sous forme d'intégrale définie, qui nous sera très utile par

la suite. Soit $f(t)$ une fonction analytique, apte à l'intégration le long d'une ligne c. Je dis que l'on opère sur cette fonction la transformation de Heine [1] lorsqu'on en déduit une nouvelle fonction $\varphi(u)$ par la position

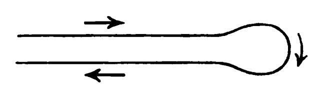
$$\varphi(u) = \int_{(c)} \frac{f(t)\,dt}{t - u}. \tag{8}$$

En indiquant par H l'opération ainsi exécutée sur $f(t)$, l'égalité précédente pourra donc s'écrire

$$\varphi(u) = H(f(t));$$

cette opération est évidemment distributive.

6. Prenons comme chemin c une ligne qui venant de l'infini dans une certaine direction, y retourne dans le même direction, comme dans la figure ci-contre, et supposons que la fonction $f(t)$ soit infinie d'un ordre fini ρ (positif, nul ou négatif) pour $t = \infty$, en sorte que l'on puisse déterminer un nombre entier et positif μ tel que l'on ait



$$\rho - \mu = - r - \varepsilon,$$

où r est un entier donné positif et ε une quantité positive. L'expression

$$H\left(\frac{f(t)}{t^\mu}\right)$$

est alors évidemment convergente.

7. On a, en posant

$$\varphi(u) = u^\mu H\left(\frac{f(t)}{t^\mu}\right),$$

que

$$\varphi(u) = \int_{(c)} f(t)\left(\frac{1}{t-u} - \frac{1}{t} - \frac{u}{t^2} - \ldots - \frac{u^{\mu-1}}{t^\mu}\right)dt,$$

[1] A cause de l'usage qu'en a fait ce géomètre dans le cas où $f(t)$ est l'intégrale d'une équation linéaire du deuxième ordre. (V. *Handbuch der Kugelfunctionen,* Bd. 1, p. 389 et Journal de Crelle, t. 60: *Über die Lamé'schen Functionen verschiedener Ordnungen.*)

d'où, en dérivant par rapport à u et en intégrant par parties, en remarquant de plus que la partie aux limites est nulle, il vient:

$$\varphi'(u) = u^{\mu-1} H\left(\frac{f'(t)}{t^{\mu-1}}\right),$$

et en appliquant de nouveau la dérivation par rapport à u et l'intégration par parties, on trouve quel que soit k:

$$\text{(9)} \qquad \frac{\varphi^{(k)}(u)}{u^{\mu-k}} = H\left(\frac{f^{(k)}(t)}{t^{\mu-k}}\right).$$

8. Soit maintenant l'intégrale

$$H(f^{(k)}(t)t^{h+k-\mu}) = \int_{(c)} \frac{f^{(k)}(t)t^{h+k}dt}{t^{\mu}(t-u)}$$

qui est aussi convergente, d'après le choix de μ, pour $h < r$. Elle peut s'écrire identiquement

$$\int_{(c)} \frac{f^{(k)}(t)}{t^{\mu-k}} \{t^{h-1} + t^{h-2}u + \ldots + u^{h-1}\} dt + u^h \int_{(c)} \frac{f^{(k)}(t)dt}{t^{\mu-k}(t-u)}.$$

Cette dernière intégrale n'est autre, d'après la formule (9), que

$$\varphi^{(k)}(u)u^{k+h-\mu};$$

quant à la première, c'est une fonction rationnelle et entière de u, du degré $h - 1$, dont les coefficients sont les intégrales, toutes convergentes

$$\int_{(c)} f^{(k)}(t)t^{g+k-\mu}dt. \qquad (g=0,1,2,\ldots,h-1)$$

En intégrant k fois successives par parties et en remarquant à chaque fois que la partie aux limites est nulle d'après le choix de μ, on a

$$\int_{(c)} f^{(k)}(t)t^{g+k-\mu}dt = (-1)^k(g+k-\mu)_k \int_{(c)} f(t)t^{g-\mu}dt,$$

d'où il résulte enfin

$$(10)\quad H(f^{(k)}(t)t^{h+k-\mu}) = \varphi^{(k)}(u)u^{h+k-\mu} + \sum_{g=0}^{h-1}(\mu - 1 - g)_k u^{h-g-1}\int_{(c)} f(t)t^{g-\mu}dt.$$

Cette formule nous exprime les propriétés fondamentales de l'opération H.

Applications de la transformation de Heine.

9. Reprenons l'équation homogène (6), et supposons que α_i soit une racine simple de l'équation (7), en sorte que l'équation déterminante relative au point α_i n'aura qu'une racine non entière. D'après la théorie bien connue de M. Fuchs, on n'aura alors qu'une intégrale particulière qui, après une rotation autour du point α_i, se reproduit multipliée par une constante différente de l'unité; soit U_i cette intégrale que l'on dira *correspondante* au point α_i.

Décrivons maintenant la ligne c indiquée au § 6 en sorte que partant de l'infini dans la direction du rayon qui joint l'origine au point α_i, elle décrive un contour qui embrasse le point α_i et revienne ensuite à l'infini suivant la même direction, sans contenir aucun autre point singulier de l'équation (6); soit c_i la ligne ainsi parcourue. Les intégrales de l'équation (6) sont toutes, pour $t = \infty$, infinies d'un ordre nécessairement fini; en effet, l'équation déterminante relative au point $t = \infty$ est

$$a_{0.m}\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 1) + a_{0.m-1}\rho(\rho - 1)\ldots(\rho - m + 2) + \ldots + a_{0.0} = 0,$$

et l'on a supposé $a_{0.m}$ essentiellement différent de zéro.

Soit donc ρ_i l'ordre d'infini de l'intégrale U_i pour $t = \infty$; nous pourrons appliquer à cette intégrale divisée par t^μ la transformation de Heine, pourvu que nous prenions l'entier μ assez grand pour que l'on ait

$$\rho_i - \mu = -r - \varepsilon,$$

ε étant une quantité positive; cherchons donc quel est le résultat de cette opération en prenant pour chemin d'intégration la ligne c_i que nous venons de définir. Nous poserons pour cela:

$$(11)\qquad \varphi_i(u) = u^\mu \int_{(c_i)} \frac{U_i(t)dt}{t^\mu(t - u)}.$$

Or, comme l'opération H est distributive, en appliquant cette opération à (6), divisée préalablement par t^μ, on a

$$\sum_{k=0}^{m}\sum_{h=0}^{r} a_{r-h.k} H(t^{h+k-\mu} U_i^{(k)}) = 0$$

qui, par l'application des formules (9) et (10), devient

$$\frac{\Delta\varphi_i(u)}{u^\mu} = -\sum_{k=0}^{m}\sum_{h=0}^{r}\sum_{g=0}^{h-1} a_{r-h.k}(\mu - 1 - g)_k u^{h-g-1} \int_{(c_i)} U_i t^{g-\mu} dt; \tag{12}$$

c'est là une équation de la forme (1) dont $\varphi_i(u)$, donnée par la formule (11), est une intégrale.

10. Les intégrales définies qui figurent au paragraphe précédent sont toutes convergentes, d'après le choix de μ. Posons:

$$p_{\mu-g} = \int_{(c_i)} U_i t^{g-\mu-1} dt; \qquad (g=1,2,3,\ldots,r) \tag{13}$$

les coefficients des puissances de u dans le second membre de l'équation (12) seront des fonctions linéaires des quantités $p_{\mu-1}, p_{\mu-2}, \ldots, p_{\mu-r}$, et l'on voit facilement en ordonnant le second membre de (12) suivant les puissances de u, que cette équation prend la forme:

$$\Delta\varphi_i(u) \tag{14}$$
$$= -u^\mu \sum_{h=1}^{r} u^{r-h}\{a_0(\mu-h)p_{\mu-h} + a_1(\mu-h)p_{\mu-h+1} + \cdots + a_{h-1}(\mu-h)p_{\mu-1}\}.$$

11. L'expression (11) est développable en une série de puissances entières et positives de u, pour toutes les valeurs de u dont le module est inférieur au module minimum de t le long du chemin d'intégration. Mais comme ce chemin est aussi rapproché de α_i qu'on le veut, on peut dire que le développement en série de $\varphi_i(u)$ converge dans un cercle de centre $u = 0$ et dont le rayon diffère de $|\alpha_i|$ d'aussi peu qu'on le veut. Nous indiquons ce fait par la notation

$$p_n \sim \frac{1}{|\alpha_i|^n}$$

quand on pose

$$\varphi_i(u) = \sum_{n=\mu}^{\infty} p_n u^n; \tag{15}$$

Or, on a

$$p_n = \int_{(c_i)} U_i t^{-n-1} dt; \tag{16}$$

ce système p_n obéit donc à la relation récurrente (2), d'où il résulte (§ 4) que le cercle de convergence de (15) est précisément $|\alpha_i|$.

Tandis que l'on définit ainsi p_n au moyen de la formule (16), pour les valeurs de l'indice depuis $n = \mu$ jusqu'à l'infini, la formule (13) définit encore p_n pour les valeurs de l'indice depuis $\mu - r$ jusqu'à $\mu - 1$. Mais si l'on substitue dans l'équation (12) la série de puissances (15) qui représente $\varphi_i(u)$, il résulte du calcul développé au § 3 que le second membre de l'équation différentielle (12) est de la forme (v. éq. (4))

$$u^\mu \sum_{h=1}^{r} u^{r-h}[a_h(\mu - h)p_\mu + a_{h+1}(\mu - h)p_{\mu+1} + \ldots + a_r(\mu - h)p_{\mu+r-h}].$$

Cette forme devant être identique avec le second membre de l'équation (14), on obtient, en identifiant les coefficients:

$$\begin{aligned} a_0(\mu - h)p_{\mu-h} + a_1(\mu - h)p_{\mu-h+1} + \ldots + a_{h-1}(\mu - h)p_{\mu-1} \\ + a_h(\mu - h)p_\mu + \ldots + a_r(\mu - h)p_{\mu+r-h} = 0; \qquad {\scriptstyle (h=1,2,3,\ldots,r)} \end{aligned}$$

c'est là l'équation récurrente (2), qui se trouve donc vérifiée non seulement pour les valeurs de l'indice depuis $n = \mu$ jusqu'à $n = \infty$, mais encore pour les valeurs depuis $n = \mu - r$ jusqu'à $n = \mu - 1$. L'intégrale p_n de l'équation (2) est donc parfaitement déterminée par les r valeurs (13).

12. La méthode indiquée dans ce qui précède nous permet de déterminer r intégrales de l'équation (2), en donnant à l'indice i les valeurs $1, 2, \ldots, r$. Si les modules des racines α_i sont tous différents, chacune des r séries φ_i aura un cercle de convergence différent, et en posant

$$\psi_i = \lambda_i \varphi_i + \lambda_{i+1} \varphi_{i+1} + \ldots + \lambda_r \varphi_r,$$

où les constantes $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_r$ (pour lesquelles on peut faire abstraction d'un multiplicateur commun) donnent une variété ∞^{r-i}, la série ψ_i converge dans le cercle de rayon $|\alpha_i|$. Les coefficients P_n du développement de ψ_i en série nous donnent donc une intégrale de l'équation (2) telle que

(17) $$P_n \sim \frac{1}{|a_i|^n},$$

et nous venons de voir que les intégrales de l'équation (2) qui vérifient cette condition (17) constituent une variété ∞^{r-i}. Le même raisonnement montre donc qu'il n'y a en général, (c'est-à-dire lorsqu'il n'y a qu'une racine simple de l'équation (7) dont le module ait la valeur maxima $|\alpha_r|$) qu'une seule intégrale de l'équation (2) telle que

(17') $$P_n \sim \frac{1}{|a_r|^n};$$

c'est là l'intégrale distinguée, que nous représenterons par ϖ_n; la fonction génératrice est

(11') $$\varphi_r = u^\mu \int_{(c_r)} \frac{U_r(t)dt}{t^\mu(t-u)}$$

et l'on a

(16') $$\varpi_n = \int_{(c_r)} U_r(t)t^{-n-1}dt. \qquad (n=\mu-1, \mu-r+1, \ldots, \infty)$$

La convergence de ces intégrales résulte de la façon dont on a choisi l'exposant μ.

13. Lorsque la racine non entière de l'équation déterminante relative au point α_i a sa partie réelle plus grande que -1, il est clair qu'on peut substituer à l'intégrale définie prise le long du chemin c_i, l'intégrale, qui n'en diffère que par un facteur, prise de α_i à l'infini selon le prolongement du rayon qui joint l'origine au point α_i. Dans ce cas, les formules (11) et (16) peuvent être remplacées respectivement par

$$\varphi_i(u) = u^\mu \int_{a_i}^{\infty} \frac{U_i(t)dt}{t^\mu(t-u)},$$

et

$$p_n = \int_{a_i}^{\infty} U_i(t)t^{-n-1}dt.$$

L'équation récurrente inverse.

14. Changeons dans l'équation aux différences (2), le polynôme $a_h(n)$ en $a_h(n-h)$ et p_{n+h} en q_{n-h}; nous obtenons ainsi une nouvelle équation aux différences:

$$(18)\quad a_r(n-r)q_{n-r}+a_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1}+\ldots+a_1(n-1)q_{n-1}+a_0(n)q_n=0.$$

Nous dirons que cette équation est *l'inverse* de l'équation (2). Si l'on répète sur l'équation (18) l'opération qui a servi à passer de (2) à (18), on trouve l'équation inverse de (18); or le calcul, fort simple, montre immédiatement que cette nouvelle équation ne diffère aucunement de l'équation (2), sauf le changement de l'indice n en $n+r$.

15. Il est facile de former l'équation différentielle génératrice de l'équation (18). A cet effet, mettons-la sous la même forme que l'équation (2), c'est-à-dire changeons n en $n+r$: il vient ainsi

$$\sum_{h=0}^{r}(a_{r-h.m}(n+r)_m+a_{r-h.m-1}(n+r)_{m-1}+\ldots+a_{r-h.1}(n+r)_1+a_{r-h.0})q_{n+h}=0;$$

mais on peut poser

$$\begin{aligned} & a_{r-h.m}(n+r)_m+a_{r-h.m-1}(n+r)_{m-1}+\ldots+a_{r-h.0} \\ & =\mathfrak{a}_{r-h.m}(n+h)_m+\mathfrak{a}_{r-h.m-1}(n+h)_{m-1}+\ldots+\mathfrak{a}_{r-h.0}, \end{aligned}$$

où les coefficients $\mathfrak{a}_{r-h.k}$ se calculent très aisément au moyen d'une formule bien connue, tout-à-fait analogue à celle de TAYLOR et applicable aux fonctions entières ordonnées suivant les factorielles $(n+r)_k$. Il importe de remarquer que

$$\mathfrak{a}_{h.m}=a_{h.m},\qquad (h=0,1,2,\ldots,r)$$

et

$$\mathfrak{a}_{0.k}=a_{0.k}.\qquad (k=0,1,2,\ldots,m)$$

L'équation (18) qui s'écrit maintenant

$$\sum_{h=1}^{r}(\mathfrak{a}_{r-h.m}(n+h)_m+\mathfrak{a}_{r-h.m-1}(n+h)_{m-1}+\ldots+\mathfrak{a}_{r-h.0})q_{n+h}=0$$

a la même forme que l'équation (2), et on peut donc immédiatement en déduire l'équation différentielle génératrice, comme on l'a vu au § 1. Cette équation différentielle est

$$(19) \qquad \sum_{k=0}^{m} (\mathrm{a}_{r.k} t^r + \mathrm{a}_{r-1.k} t^{r-1} + \ldots + \mathrm{a}_{0.k}) t^k \frac{d^k V}{dt^k} = t^\mu R(t).$$

16. De la remarque que $\mathrm{a}_{k.m} = a_{k.m}$, il résulte que le coefficient de $t^m V^{(m)}$ dans l'équation (19) est

$$a_{r.m} t^r + a_{r-1.m} t^{r-1} + \ldots + a_{0.m},$$

qui, égalé à zéro, donne les points singuliers autres que $t = 0$ et $t = \infty$ de cette équation (19). Or l'équation algébrique que l'on obtient ainsi n'est autre que la réciproque de (7); les points singuliers en question sont donc en ordre de modules non décroissants:

$$\frac{1}{\alpha_r}, \frac{1}{\alpha_{r-1}}, \ldots, \frac{1}{\alpha_1}.$$

En outre, de la remarque que $\mathrm{a}_{0.k} = a_{0.k}$, il suit que l'équation déterminante de (19), relative au point $t = 0$, est précisément l'équation déterminante de (1) relative au point $t = \infty$, tandis que l'équation déterminante de (19) pour $t = \infty$ ne diffère de celle de (1) pour $t = 0$ que par le changement de ρ en $\rho + r$.

17. Pour les intégrales de l'équation récurrente (18), on a en général

$$\lim_{n=\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = \alpha_r.$$

Exceptionnellement, c'est-à-dire pour certaines intégrales particulières, il pourra se faire que cette limite ait un module moindre et précisément le module d'une autre des racines de (7). Les paragraphes précédents nous donnent une méthode pour déterminer ces intégrales, et en particulier l'intégrale distinguée, pour laquelle

$$\lim_{n=\infty} \frac{q_{n+1}}{q_n} = \alpha_1.$$

Applications.

18. Supposons $r = 1$. Alors l'équation (1) prend la forme

$$\sum_{k=0}^{m} (a_k t + b_k) t^k \frac{d^k U}{dt^k} = t^\mu R(t);$$

le rapport de deux coefficients consécutifs dans le développement en série de son intégrale est une fonction rationnelle de l'indice n. C'est là le type hypergéométrique généralisé de M. GOURSAT.

19. Supposons maintenant $r = 2$. L'équation aux différences (2) prend alors la forme

(a) $$a_2(n) p_{n+2} + a_1(n) p_{n+1} + a_0(n) p_n = 0,$$

que nous écrirons pour abréger:

(b) $$p_{n+2} = c_{n+2} p_{n+1} + c'_{n+2} p_n.$$

Déterminons maintenant deux intégrales de cette équation par les conditions

(c) $$\left| \begin{array}{ll} p_{\mu-2} = 1, & p'_{\mu-2} = 0, \\ p_{\mu-1} = 0, & p'_{\mu-1} = 1, \end{array} \right.$$

puis considérons la fraction continue:

(d) $$\sigma = \cfrac{c'_\mu}{c_\mu + \cfrac{c'_{\mu+1}}{c_{\mu+1} + \cfrac{c'_{\mu+2}}{c_{\mu+2} + \dots}}}$$

On voit aisément que sa réduite est, en général, $\frac{p_n}{p'_n}$, où p_n et p'_n sont déterminées précisément par les conditions initiales (c).

Il s'agit de rechercher si cette fraction continue est convergente, et d'en trouver la valeur. Cette recherche peut se faire comme il suit.

a) Je commence par remarquer que toute intégrale de l'équation (b) peut s'écrire

$$P_n = \lambda p_n + \mu p'_n,$$

où λ et μ sont des constantes. On en tire

$$\frac{P_n}{p'_n} = \lambda \frac{p_n}{p'_n} + \mu$$

et si la limite de $P_n : p'_n$ est nulle pour $n = \infty$, il en résultera précisément

$$\sigma = -\frac{\mu}{\lambda}.$$

b) D'après cette remarque, on voit que la recherche de la valeur de σ coïncide avec la recherche des valeurs des constantes λ, μ, pour lesquelles la limite de $P_n : p'_n$ est nulle.

Reprenons pour cela l'équation (1) qui a actuellement la forme

$$\text{(e)} \qquad \Delta U = \sum_{k=0}^{m} (a_k t^2 + b_k t + c_k) t^k \frac{d^k U}{dt^k} = t^\mu R(t),$$

et posons

$$a_m t^2 + b_m t + c_m = (t - \alpha)(t - \beta), \qquad |\beta| > |\alpha|.$$

On voit alors, si U est l'intégrale correspondante au point β de l'équation $\Delta U = 0$, que

$$\varphi(u) = \int_{(c)} \frac{U dt}{t^\mu (t - u)},$$

est l'intégrale de l'équation (e) prise sous la forme

$$\sum_{k=0}^{m} (a_k u^2 + b_k u + c_k) u^k \frac{d^k U}{du^k}$$

$$= -u^\mu \{a(\mu - 1) u \varpi_{\mu-1} + a(\mu - 2)\varpi_{\mu-2} + b(\mu - 1)\varpi_{\mu-1}\}$$

où

$$\varpi_{\mu-1} = \int_{(c)} \frac{U dt}{t^\mu}, \qquad \varpi_{\mu-2} = \int_{(c)} \frac{U dt}{t^{\mu-1}}.$$

c) Cela posé, rappelons que l'intégrale $\varphi(u)$ est développable en une série de puissances entières et positives de u, $\sum \varpi_n u^n$, où ϖ_n est l'intégrale distinguée de l'équation (b) puisque U est l'intégrale correspondante au point singulier de plus grand module de l'équation $\Delta U = 0$. On peut poser

$$\varpi_n = \lambda p_n + \mu p'_n$$

et l'on sait que la limite de $\varpi_n : p'_n$ est nulle pour $n = \infty$. On a en outre, à cause des (c),

$$\lambda = \varpi_{\mu-2} = \int\limits_{(c)} \frac{U dt}{t^{\mu-1}}, \qquad \mu = \varpi_{\mu-1} = \int\limits_{(c)} \frac{U dt}{t^{\mu}},$$

d'où il suit enfin

$$\text{(g)} \qquad \sigma = -\frac{\mu}{\lambda} = -\frac{\int\limits_{(c)} U t^{-\mu} dt}{\int\limits_{(c)} U t^{1-\mu} dt},$$

formule qui transforme une fraction continue dont les éléments sont des fonctions rationnelles de l'indice en un quotient d'intégrales définies, et qui renferme comme cas particulier le développement en fraction continue que Gauss a fait connaître pour le quotient de deux fonctions hypergéométriques contigues.

Systèmes récurrents de fonctions.

20. Nous avons supposé jusqu'ici que les coefficients de l'équation (1) soient des constantes. Regardons maintenant ces mêmes coefficients comme dépendant d'un certain nombre de paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_j$ dont ils soient des fonctions analytiques. En indiquant par $[x]$ un système déterminé de valeurs de ces paramètres, on pourra dire, pour abréger le langage, que $[x]$ est un point de l'hyperespace S_{2j} à $2j$ dimensions défini par le système des j paramètres complexes $x_1, x_2, \ldots, x_j$.

En considérant alors l'équation (7), on voit que ses racines seront aussi des fonctions analytiques des paramètres x. Les points $[x]$ pour lesquels deux de ces racines ont même module forment un hyperespace S' à $2j - 1$ dimensions contenu dans S_{2j}; si l'on prend un point $[x_0]$

de S_{2j} qui n'appartient pas à S', pour tout point d'un domaine de $[x_0]$ suffisamment restreint, on pourra ordonner les racines de (7) selon leur module croissant

$$|\alpha_1| < |\alpha_2| < \ldots < |\alpha_r|;$$

d'après les résultats des paragraphes précédents, on a un système ∞^{r-i} d'intégrales p_n de l'équation aux différences (2) pour lesquelles

$$\lim_{n=\infty} \frac{p_{n-1}}{p_n} = \alpha_i,$$

et en particulier une unique intégrale (intégrale distinguée) pour laquelle cette limite est α_r. Pour tous les points du domaine considérée de x_0, la limite du rapport de cette intégrale distinguée à une intégrale quelconque de l'équation (2) est nulle pour $n = \infty$; dans le cas particulier où l'équation récurrente est du deuxième ordre, cette intégrale distinguée constitue le système des restes de la fraction continue dont les numérateurs et dénominateurs des réduites satisfont à la même équation. Je n'en dirai pas davantage sur le cas général où les coefficients de (2) sont des fonctions analytiques quelconques des paramètres, et je m'arrêterai plutôt à l'hypothèse particulière qui suit, et qui est la plus intéressante, parcequ'elle offre la généralisation des fractions continues algébriques ordinaires.

21. Dans cette hypothèse, je supposerai que les coefficients de l'équation (2) dépendent d'un seul paramètre x et en outre que ce paramètre entre au premier degré dans les coefficients, excepté dans $a_{0.k}$ et $a_{r.k}$ que je regarderai comme indépendants de x. L'équation différentielle (1) pourra alors s'écrire:

$$(20) \quad \sum_{k=0}^{m} [a_{0.k} t^r + (a_{1.k} - x b_{1.k}) t^{r-1} + \ldots + (a_{r-1.k} - x b_{r-1.k}) t + a_{r.k}] t^k \frac{d^k U}{dt^k} = 0,$$

et l'équation (2) deviendra:

$$(21) \qquad a_r(n) p_{n+r} + (a_{r-1}(n) - x b_{r-1}(n)) p_{n+r-1} + \ldots \\ + (a_1(n) - x b_1(n)) p_{n+1} + a_0(n) p_n = 0.$$

D'après le § 14, nous savons écrire l'équation inverse de l'équation (21); en y changeant le paramètre x en z, cette équation sera:

$$(22)\qquad a_r(n-r)q_{n-r} + (a_{r-1}(n-r+1) - zb_{r-1}(n-r+1))q_{n-r+1} + \dots$$
$$+ (a_1(n-1) - zb_1(n-1))q_{n-1} + a_0(n)q_n = 0.$$

Nous allons étudier un système récurrent de fonctions défini par l'équation (21).

Développement d'une fonction en série ordonnée suivant les polynômes d'un système récurrent.

22. Déterminons une intégrale particulière de l'équation (21) par les conditions que p_0 soit égal à l'unité et que pour une valeur négative de l'indice n les p_n soient nulles: indiquons par $P_n(x)$ ce système particulier. L'équation (21) montre que $P_n(x)$ sera un polynôme entier en x, de degré précisément égal à n. Nous avons ainsi défini un système récurrent très général de polynômes de degré égal à leur indice; c'est le système dont l'échelle de relation (éq. 21) a ses coefficients linéaires en x et rationnels en n.

Je dis maintenant qu'il est possible d'obtenir le développement d'une fonction analytique quelconque de x en série ordonnée suivant les polynômes d'un tel système et d'en donner les conditions de convergence; nous allons nous occuper de cette question.

A cet effet, écrivons l'équation (21) pour toutes les valeurs de n depuis $n = -r + 1$ jusqu'à l'infini, et multiplions respectivement par q_n; en sommant ces équations et en ordonnant par rapport aux indices croissants de P_n, on a, abstraction faite de la convergence dont les conditions seront données plus loin:

$$\begin{aligned}
&P_0\{a_{r-1}(-r+1)q_{-r+1} + a_{r-2}(-r+2)q_{-r+2} + \dots + a_0(0)q_0\} \\
&+ P_1\{a_r(-r+1)q_{-r+1} + a_{r-1}(-r+2)q_{-r+2} + \dots + a_0(1)q_1\} \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ P_n\{a_r(n-r)q_{n-r} + a_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1} + \dots + a_0(n)q_n\} + \dots \\
= x\big[&P_0\{b_{r-1}(-r+1)q_{-r+1} + b_{r-2}(-r+2)q_{-r+2} + \dots + b_1(-1)q_{-1}\} \\
&+ P_1\{b_{r-1}(-r+2)q_{-r+2} + b_{r-2}(-r+3)q_{-r+3} + \dots + b_1(0)q_0\} \\
&+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ P_n\{b_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1} + b_{r-2}(n-r+2)q_{n-r+2} + \dots + b_1(n-1)q_{n-1}\} + \dots\big].
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que les quantités q_n satisfont à l'équation récurrente (22), que nous supposerons vérifiée à partir des valeurs de l'indice $n = 0$, $n = 1$, pour lesquelles on a:

$$a_r(-r)q_{-r} + (a_{r-1}(-r+1) - zb_{r-1}(-r+1))q_{-r+1} + \dots$$
$$+ (a_1(-1) - zb_1(-1))q_{-1} + a_0(0)q_0 = 0,$$
$$a_r(-r+1)q_{-r+1} + (a_{r-1}(-r+2) - zb_{r-1}(-r+2))q_{-r+2} + \dots$$
$$+ (a_1(0) - zb_1(0))q_0 + a_0(1)q_1 = 0;$$

d'où il suit que le premier membre de l'égalité précédente pourra s'écrire

$$P_0\{-a_r(-r)q_{-r} + z(b_{r-1}(-r+1)q_{-r+1} + b_{r-2}(-r+2)q_{-r+2} + \dots + b_1(-1)q_{-1})\}$$
$$+ zP_1\{b_{r-1}(-r+2)q_{-r+2} + b_{r-2}(-r+3)q_{-r+3} + \dots + b_1(0)q_0\}$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ zP_n\{b_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1} + b_{r-2}(n-r+2)q_{n-r+2} + \dots + b_1(n-1)q_{n-1}\} + \dots,$$

et par conséquent cette égalité elle-même devient:

$$P_0 a_r(-r)q_{-r}(z) = (z-x)\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\{b_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1}(z)$$
$$+ b_{r-2}(n-r+2)q_{n-r+2}(z) + \dots + b_1(n-1)q_{n-1}(z)\}.$$

Mais $P_0 = 1$ par hypothèse, d'où il résulte enfin, puisque $a_r(-r) = a_{r.0}$:

$$(23) \qquad \frac{1}{z-x} = \frac{1}{a_{r.0}q_{-r}(z)} \sum_{n=0}^{\infty} \{b_{r-1}(n-r+1)q_{n-r+1}(z) + \dots$$
$$+ b_1(n-1)q_{n-1}(z)\}P_n(x).$$

23. Nous avons établi formellement ce développement; il s'agit maintenant d'en rechercher les conditions de convergence. Pour cela, l'équation (7) prend actuellement la forme

$$a_{0.m}t^r + (a_{1.m} - xb_{1.m})t^{r-1} + \dots + (a_{r-1.m} - xb_{r-1.m})t + a_{r.m} = 0;$$

continuons à indiquer par α_1 sa racine de module minimum. A chaque valeur de x correspond une valeur et une seule de $|\alpha_1|$, laquelle n'est infinie pour aucune valeur de x et ne peut même dépasser la valeur

$$\rho_0 = \left|\sqrt[r]{\frac{a_{r.m}}{a_{0.m}}}\right|$$

et qui est nulle pour $x = \infty$ et pour cette valeur de x seulement.

Indiquons par C_ρ le lieu des points du plan x pour lesquels on a $|\alpha_1(x)| = \rho$, ρ étant une quantité positive quelconque plus petite que ρ_0. Ce lieu est une portion de la courbe analytique qui, dans le plan des x, correspond au cercle $|t| = \rho$ du plan des t. Tout point du plan x non situé sur la courbe C_ρ appartient, soit à l'ensemble des points pour lesquelles on à $|\alpha_1(x)| > \rho$ et que j'indiquerai par E_ρ, soit à l'ensemble des points pour lesquels on a $|\alpha_1(x)| < \rho$, et que j'indiquerai par E'_ρ. L'ensemble E_ρ se réduit à zéro pour $\rho = \rho_0$; pour toute valeur de $\rho < \rho_0$, E_ρ est une aire (connexe ou non) finie, tandis que E'_ρ est une aire infinie; on ne peut passer de l'une à l'autre sans traverser C_ρ, qui est donc une courbe fermée ou composée de plusieurs courbes fermées. Deux courbes $C_{\rho'}$, $C_{\rho'}$, où ρ' est plus grand que ρ, ne peuvent se couper, et comme C_ρ, est tout entière dans le champ E_ρ, on peut dire qu'elle est intérieure à C_ρ.

24. Tandis que nous avons parfaitement déterminé le système de polynômes $P_n(x)$ qui figure dans le second membre du développement (23), par les conditions

$$P_0 = 1, \qquad P_{-1} = P_{-2} = \ldots = 0,$$

nous n'avons pas encore déterminé $q_n(z)$, qui est jusqu'ici une intégrale quelconque de l'équation (22). Nous allons à présent déterminer cette intégrale en fixant que le systéme $q_n(z)$ soit *l'intégrale distinguée* de l'équation récurrente (22); nous l'indiquerons par $Q_n(z)$ et nous avons, ainsi qu'on l'a vu (§ 16),

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)} = \alpha_1(z).$$

Cela posé, prenons une courbe C_ρ quelconque ($\rho > \rho_0$), et soit x un point quelconque du champ E_ρ, z un point quelconque du champ E'_ρ; on aura pour de telles valeurs de x et de z:

$$|\alpha_1(z)| < |\alpha_1(x)|.$$

Je dis que pour ces valeurs de x et de z, la série (23) est convergente. Elle se compose, en effet, de la somme de $r - 1$ séries de la forme

$$(23') \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_h(n-h)\, Q_{n-h}(z)\, P_n(x); \qquad (h=1,2,\ldots,r-1)$$

or, en formant le rapport d'un terme au précédent dans cette série, il vient:

$$(24) \qquad \frac{b_h(n+1-h)\, Q_{n+1-h}(z)\, P_{n+1}(x)}{b_h(n-h)\, Q_{n-h}(z)\, P_n(x)};$$

mais $b_h(n)$ étant un polynôme de degré m en n, le rapport

$$b_h(n+1-h) : b_h(n-h)$$

tend à l'unité pour $n = \infty$; quant à Q_n et P_n, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_{n+1}(z)}{Q_n(z)} = \alpha_1(z), \qquad \lim_{n=\infty} \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} = \frac{1}{\alpha_1(x)};$$

la limite du rapport (24) est donc pour les valeurs considérées de x et de z, plus petite que l'unité en valeur absolue, et par conséquent chacune des séries (23') et par suite aussi la série (23) est absolument convergente. Elle l'est de plus uniformément dans le champ E_ρ par rapport à x, (le contour C_ρ exclus) ainsi que cela résulte de la démonstration donnée aux §§ 9 et 10 de mon mémoire: *Sui sistemi di funzioni analitiche e le serie formate coi medesimi,*[1] et dans le champ E'_ρ par rapport à z.

25. Il est maintenant facile de déterminer le développement d'une fonction analytique donnée $f(x)$ en une série de polynômes $P_n(x)$. Il suffit en effet que cette fonction soit donnée à l'intérieur de l'un des champs désignés par E_ρ, pour que l'on puisse lui appliquer le théorème de Cauchy; on a alors

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(C_{\rho_1})} \frac{f(z)\,dz}{z-x},$$

z étant prise le long d'une courbe C_{ρ_1} pour $\rho_1 < \rho$ et par conséquent

[1] Annali di Matematica, S. 2, T. 12, 1884.

tout entière à l'intérieur de E'_ρ. Le développement de $\frac{1}{z-x}$ en série (23) étant uniformément convergent, on peut intégrer la série terme à terme, et il vient:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x), \tag{25}$$

où

$$2\pi i a_{r.0} C_n = \int_{(C_{\rho_1})} \{ b_{r-1}(n-r+1) Q_{n-r+1}(z) + b_{r-2}(n-r+2) Q_{n-r+2}(z) + \dots$$
$$+ b_1(n-1) Q_{n-1}(z) \} \frac{f(z)dz}{Q_{-r}(z)}.$$

Nous avons ainsi obtenu le développement d'une fonction analytique donnée en une série ordonnée suivant les polynômes d'un système récurrent dont (21) est l'échelle de relation, et nous avons trouvé les conditions de convergence de ce développement, toutes les fois que l'échelle de relation est d'ordre fini et que ses coefficients sont des fonctions rationnelles par rapport à l'indice et linéaires par rapport à la variable, et qu'en outre $a_{r.0}$ est différent de zéro.

Bologne, 30 juin 1891.

EXPRESSION COMPLÈTE ET SIGNIFICATION VÉRITABLE DE LA NUTATION INITIALE.

DÉMONSTRATION QUI EN RÉSULTE DE LA FLUIDITÉ INTÉRIEURE DU GLOBE. CONSÉQUENCES ANALYTIQUES DE CELLE-CI DANS LES FORMULES DE L'ASTRONOMIE.

PAR

F. FOLIE

À BRUXELLES.

Il est une question d'analyse que tous les géomètres qui se sont occupés de l'étude du mouvement de rotation de la terre ont correctement traitée depuis EULER, LAPLACE, BESSEL, POISSON, SERRET, etc., mais que les astronomes avaient négligée pendant longtemps.

C'est celle de la nutation qui provient des constantes arbitraires que l'intégration introduit dans les équations du mouvement de rotation de la terre, nutation qui serait nulle dans le cas seulement où la terre aurait tourné primitivement autour d'un axe principal.

BESSEL le premier, W. STRUVE ensuite, ont commencé à se préoccuper de cette question au point de vue astronomique.

Et PETERS a très exactement déterminé deux des constantes de cette nutation, au moyen de la série de ses observations sur la hauteur du pôle à Poulkova pendant les années 1841—1844. Plusieurs autres astronomes, parmi lesquels il faut citer surtout NYRÉN, DOWNING et, tout récemment, VAN DE SANDE BACKHUYZEN, ont réussi à déterminer également ces constantes avec une assez grande exactitude.

Seulement, depuis que la question de cette nutation, qu'on appelle quelquefois *eulérienne,* et que j'appellerai *initiale* parce qu'elle dépend des conditions initiales du mouvement de rotation de la terre, est entrée dans le domaine pratique, il est arrivé que les astronomes ne se sont plus préoccupés du caractère diurne attribué par tous les géomètres à cette nutation, et que quelques-uns ont même été jusqu'à contester ce caractère.

Il se manifeste cependant d'une manière tellement évidente dans les formules, que l'on a quelque peine à concevoir que des astronomes-géomètres aient pu l'oublier; aucun astronome même n'a songé à profiter du caractère diurne de cette nutation pour en déterminer les constantes, ce qui est cependant la voie la plus simple et la plus sûre, comme nous le verrons.

Laplace avait signalé très nettement ce caractère dans les termes suivants:

On voit que, si G (coefficient de la nutation initiale) ***était sensible, on le reconnaîtrait par les variations journalières de la hauteur du pôle.***

C'est Oppolzer qui a, le premier, contredit cette assertion du grand géomètre, en mettant en lumière, du même coup, la raison pour laquelle les astronomes ont oublié le caractère diurne de la nutation initiale dans les déterminations qu'ils ont faites de celle-ci.

Après en avoir donné correctement les formules, l'astronome viennois détermine la position de l'axe instantané de rotation par rapport au petit axe de l'ellipsoïde terrestre, et conclut, très correctement aussi, en ces termes: »On voit donc que l'axe instantané de rotation décrit, autour de l'axe de la terre, une surface conique dont l'angle d'ouverture γ_0' est déterminé par

$$\sin \gamma_0' = \frac{m}{\omega_0};$$

le sens de la rotation est celui de la terre, puisque μ est positif; la révolution est complète après un temps $= \frac{2\pi}{\mu}$. Pour μ, on a posé précédemment:

$$\mu = n \frac{C - A}{A};$$

de sorte que, n représentant la vitesse angulaire de rotation de la terre, μ dépend essentiellement de la différence qui existe entre le rapport des moments d'inertie $(C:A)$ et l'unité. Dans la suite de nos recherches, nous aurons l'occasion de déduire ces coefficients des observations (comp. p. 182); le rayon étant pris comme unité, on trouve:

$$\mu = 0.0206141,$$

et pour la durée d'un tour

$$\frac{2\pi}{\mu} = 304.80 \text{ jours solaires moyens.»}$$

Après avoir parlé des déterminations de PETERS, NYRÉN et DOWNING, il ajoute: »Cependant, il découle de recherches antérieures sur les latitudes que, même dans le cas où ξ_0 et η_0 atteindraient de grandes valeurs, il n'en résulterait encore pour les latitudes que des variations périodiques d'une période d'environ 10 mois.»[1]

Il n'y aurait rien à objecter à cette affirmation (puisque OPPOLZER entend par latitude l'inclinaison de la verticale sur le plan perpendiculaire à l'axe instantané de rotation[2]) si elle ne semblait écrite pour contredire celle de LAPLACE que j'ai citée ci-dessus.

Et c'est bien dans ce sens que l'ont entendu plusieurs astronomes.

M. RADAU a été jusqu'à dire que »l'expression de LAPLACE ne devait pas être prise au pied de la lettre»,[3] et TISSERAND lui-même a fait siennes les objections de M. RADAU contre ma manière de voir, qui est absolument celle de LAPLACE.[3]

C'est à l'occasion de mes recherches sur la *nutation diurne* que j'ai été amené à m'occuper de la *nutation initiale.* La période de la première est de 12^h, celle de la seconde, de 24^h presque exactement.

Il est impossible de déterminer la première si l'on ne connaît la seconde; mais celle-ci, au contraire, peut aisément se déterminer indépendamment de la première, comme on va le voir par l'expression même des formules auxquelles conduit l'intégration des équations du mouvement de rotation de la terre.

En désignant par A, B, C ses moments d'inertie principaux écrits dans l'ordre ascendant, par θ l'inclinaison de l'axe de C, que j'appellerai

---

[1] OPPOLZER, *Traité de la détermination des orbites,* trad. PASQUIER, p. 151.

[2] l. c., p. 150.

[3] Bulletin astronomique. 1890.

axe géographique, sur l'axe de l'écliptique fixe, ou celle de l'équateur géographique sur l'écliptique fixe, par s_1 le sinus de cette inclinaison, par λ l'angle que l'intersection de ces deux plans fait avec l'axe vernal fixe, par φ l'angle que l'axe de A fait avec cette même intersection, le dernier angle φ étant compté dans le sens du mouvement de rotation, l'autre, λ, en sens inverse, j'ai déduit des équations du mouvement de rotation de la terre, en admettant d'abord que la vitesse angulaire n autour de l'axe géographique est constante:

$$\Delta\theta = -\gamma\left\{\sin(n\iota t + \varphi + \beta_0) - \frac{\varkappa}{2+\varkappa}\sin(n\iota t - \varphi + \beta_0)\right\}$$

$$+ \eta\{\cos 2\varphi\Sigma_1 + \sin 2\varphi\Sigma_2\} + N\Sigma''_1,$$

$$s_1\Delta\lambda = -\gamma\left\{\cos(n\iota t + \varphi + \beta_0) + \frac{\varkappa}{2+\varkappa}\cos(n\iota t - \varphi + \beta_0)\right\}$$

$$+ \eta\{\cos 2\varphi\Sigma_2 - \sin 2\varphi\Sigma_1\} + N\Sigma''_2 + p.$$

Dans ces expressions, γ et β_0 sont les constantes arbitraires; η, N, p des constantes dont il est superflu que nous donnions ici l'expression complète; il suffit que nous sachions qu'elles dépendent des moments d'inertie de la terre. ι et $\varkappa$ représentent respectivement $\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}$ et $\frac{1}{4}\frac{(B-A)(B+A-C)}{B(C-B)}$. Tous les géomètres ayant supposé $A = B$, ont omis les termes en $\varkappa$.

Les symboles Σ'_1, Σ''_1, Σ_2, Σ''_2 désignent des fonctions déterminées, les deux premiers, des cosinus, les deux autres, des sinus des arguments ☊, ☉, ☾ etc.

φ est égal à $nt + L$, t désignant le temps sidéral de l'observation, L la longitude orientale du *premier méridien*, passant par l'axe du moment A.

$n\iota t + \varphi + \beta_0$ peut donc se remplacer par $n(1 + \iota)t + L + \beta_0$, que nous écrirons simplement $It + \beta$.

Nous aurons ultérieurement de graves réserves à faire quant à la constance du facteur N, lorsqu'au lieu du mouvement de rotation de la terre, considérée comme un corps solide, nous nous occuperons de celui de son écorce, en supposant qu'elle se meut plus ou moins librement sur la partie superficielle fluide du noyau.

Avant d'aller plus loin, insistons sur la signification géométrique des formules précédentes.

Elles se rapportent, comme il vient d'être dit, à l'axe (axe du monde de LAPLACE) et à l'équateur géographiques, et non à l'axe et à l'équateur instantanés.

Ce dernier axe se déplace à la surface de la terre pendant une période qui, nous le verrons, est de 336.5 jours, et non de 305.

Le méridien *astronomique* est donc variable, comme BESSEL l'a déjà fait remarquer, tandis que le méridien *géographique* est fixe.

Mais ce n'est pas un méridien variable qui peut servir à définir l'heure, ni l'ascension droite.

Nous supposerons donc l'ascension droite et la déclinaison rapportées à l'équateur géographique. La hauteur du pôle sera aussi, pour nous comme pour LAPLACE, celle du pôle géographique; et, lorsque nous emploierons le terme de latitude, nous y ajouterons, pour éviter toute amphibologie, le qualificatif *astronomique*, attribuant ainsi à la latitude, le sens que lui a donné OPPOLZER.

Discutons maintenant les équations que nous venons de poser.

On y voit clairement indiqués quatre mouvements essentiellement différents de l'axe du monde:

le premier uniforme, provenant de la constante p, et appelé précession; les trois autres périodiques, appelés nutation d'une manière générale.

J'ai nommé ci-dessus *nutation initiale* le premier de ces mouvements, dont la période est presque exactement de 1 jour sidéral.

J'ai nommé *nutation diurne* le second, dont la période est de $^1/_2$ jour sidéral, et *nutation annuelle* enfin le troisième, qui se compose en réalité d'un grand nombre de mouvements dont les périodes sont d'un an, ou d'une fraction plus ou moins grande de l'année, et peuvent même aller jusqu'à 18 ans.

Faisant abstraction de la précession, nous allons rechercher comment on pourra le mieux déterminer les trois nutations qui viennent d'être définies.

Le mouvement de l'équateur, dû à ces trois nutations, a pour effet de produire des variations correspondantes dans l'ascension droite et la déclinaison des étoiles.

On sait que ces variations se déduisent des précédentes au moyen des formules:

$$\frac{d\alpha}{dt} = (\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)s_1 \frac{d\lambda}{dt} - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta \frac{d\theta}{dt};$$

$$\frac{d\delta}{dt} = \cos\alpha s_1 \frac{d\lambda}{dt} + \sin\alpha \frac{d\theta}{dt}.$$

Afin de ne pas sortir de notre sujet, nous supposerons ici que l'on peut se borner à intégrer en écrivant simplement

$$\Delta\alpha = (\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)s_1 \Delta\lambda - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta\Delta\theta,$$

$$\Delta\delta = \cos\alpha s_1 \Delta\lambda + \sin\alpha\Delta\theta,$$

ce qui est, en effet, d'une rigueur absolument suffisante en pratique quant à la nutation initiale, sur laquelle nous portons spécialement notre attention.

L'incorrection de ce procédé d'intégration, en ce qui concerne les termes annuels, disparaîtra dans la suite de cette exposition, parce que ces termes s'élimineront.

On pourra donc écrire la nutation complète en ascension droite et en déclinaison, en négligeant provisoirement les termes en x:

$$\begin{aligned}
\Delta\alpha = \quad & \gamma\{\cos\alpha \operatorname{tg}\delta \sin(It+\beta) - (\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\cos(It+\beta)\} \\
& + \eta\{(\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)(\cos 2\varphi\Sigma_2 - \sin 2\varphi\Sigma_1) \\
& \qquad\qquad - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta(\cos 2\varphi\Sigma'_1 + \sin 2\varphi\Sigma'_2)\} \\
& + N\{(\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\Sigma'_2 - \cos\alpha \operatorname{tg}\delta\Sigma''_1\}, \\
\Delta\delta = & -\gamma\cos(It+\beta-\alpha) + \eta\{\cos\alpha(\cos 2\varphi\Sigma_2 - \sin 2\varphi\Sigma_1) \\
& \qquad\qquad + \sin\alpha(\cos 2\varphi\Sigma'_1 + \sin 2\varphi\Sigma'_2)\} \\
& + N\{\cos\alpha\Sigma'_2 + \sin\alpha\Sigma''_1\}.
\end{aligned}$$

Nous pouvons profiter du caractère diurne de la nutation initiale, pour en déterminer les constantes, abstraction faite de toute erreur de réduction.

Commençons par le procédé dont Peters et Downing ont fait usage pour déterminer celles de la variation de la latitude astronomique, qui sont, au fond, les mêmes que celles de la nutation initiale.

En désignant par Φ cette latitude, par δ la déclinaison apparente d'une étoile rapportée à l'équateur *astronomique,* par Z la distance zénitale observée, corrigée de la réfraction, ces astronomes ont écrit, pour le cas d'un passage supérieur

$$Z_s = \Phi - \delta$$

et pour le cas d'un passage inférieur

$$180^\circ - Z_i = \Phi + \delta,$$

et ils ont considéré la latitude astronomique comme une quantité variable déterminée, en fonction de la hauteur Φ_0 du pôle par

$$\Phi = \Phi_0 + \gamma \cos(nt + \beta).$$

Cette manière de voir est absolument correcte; mais elle a le tort de masquer complètement le caractère diurne de la nutation initiale, et elle explique que plusieurs astronomes aient pu nier ce caractère; elle présente, de plus, ce grave inconvénient théorique qu'il n'existe pas de formules correctes propres à déterminer la déclinaison rapportée à l'équateur *astronomique.* Celles de la mécanique céleste sont relatives, on vient de le voir, à l'équateur géographique.

Oppolzer a bien démontré que l'on peut, *sans erreur sensible,* appliquer ces formules à l'équateur astronomique.

Mais, trop exclusivement pénétré de cette idée juste que c'est autour de l'axe instantané que tourne la terre, et non autour de l'axe géographique (axe du monde de Laplace), il a perdu de vue que c'est le méridien géographique *seul* qui peut servir à définir l'heure et l'ascension droite.

Pour être tout à fait logique, il eût dû chercher à définir celles-ci au moyen de la notion du méridien astronomique passant par l'axe instantané.

Mais alors il se fût aperçu que sa définition de l'heure sidérale ne concordait plus avec celle des astronomes, et l'eût certainement abandonnée. Car il ne se serait certes pas contenté de dire que les variations du méridien astronomique d'un jour à l'autre sont tellement faibles qu'on peut les négliger *sans erreur sensible.*

De négligence en négligence, que deviendrait donc l'exactitude mathématique que l'on est en droit d'exiger, autant qu'elle peut être atteinte, des formules de la mécanique céleste, de celles surtout qui sont relatives à l'invariabilité du jour sidéral?

Or les formules employées par tous les géomètres, même les plus récents, Oppolzer seul excepté, et relatives à l'équateur et au méridien géographiques, sont absolument correctes.

Si l'on m'objecte, pour justifier Oppolzer, qu'elles ne sont pas applicables aux observations astronomiques, puisque celles-ci sont souvent faites dans le méridien astronomique, je n'ai qu'une chose à répondre; c'est que les astronomes qui procèdent ainsi ont tort, et que les seules observations qui puissent conduire à des résultats corrects par l'emploi de formules correctes sont celles faites dans le méridien géographique, qui, étant fixe, peut être déterminé une fois pour toutes par une bonne série d'observations, et est le seul qui puisse définir et donner exactement l'heure sidérale.

Donc, puisque les formules de la nutation se rapportent à l'axe du monde, et non à l'axe instantané de rotation, on doit écrire, d'une manière absolument rigoureuse, en appelant δ_m la déclinaison de l'étoile rapportée à la position moyenne de l'équateur géographique pour l'instant de l'observation, dans le cas d'un passage supérieur, puisqu'alors $nt = \alpha$ et $It + \beta - \alpha = nt + \beta$:

$$
\begin{aligned}
Z_s = \Phi_0 - \delta_m &+ \gamma \cos(nt + \beta) \\
&- \eta\{(\cot \varepsilon + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta)(\cos 2\varphi \Sigma_2 - \sin 2\varphi \Sigma_1) \\
&\qquad - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta (\cos 2\varphi \Sigma_1 + \sin 2\varphi \Sigma_2)\} \\
&- N\{(\cot \varepsilon + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \Sigma_2' - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \Sigma_1'\};
\end{aligned}
$$

et, dans le cas d'un passage inférieur, pour lequel $nt = \pi + \alpha$:

$$
\begin{gathered}
180^\circ - Z_i = \Phi_0 + \delta_m + \gamma \cos(nt + \beta) \\
+ \eta\{(\cot \varepsilon + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta)(\cos 2\varphi \Sigma_2 - \sin 2\varphi \Sigma_1) - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta (\cos 2\varphi \Sigma_1 + \sin 2\varphi \Sigma_2)\} \\
+ N\{(\cot \varepsilon + \sin \alpha \operatorname{tg} \delta) \Sigma_2^{v} - \cos \alpha \operatorname{tg} \delta \Sigma_1^{v}\}.
\end{gathered}
$$

Au sujet des termes de la nutation diurne, nous ferons remarquer d'abord que, puisqu'ils ont pour argument principal 2φ, la variation de cet argument, d'un passage supérieur au passage inférieur consécutif, ou vice versa, est sans conséquence, puisqu'il aura augmenté de 2π.

Et quant aux autres arguments, soit de la nutation, soit de l'aberration, on peut admettre, sans erreur sensible, qu'ils n'ont pas subi de variation d'un passage à l'autre; on pourra, du reste, effectuer rigoureusement le calcul pour les étoiles voisines du pôle; mais nous pouvons passer sur ce détail.

Cela posé, si l'on fait la demi-somme des deux équations précédentes, on obtient simplement

$$\frac{Z_s - Z_i}{2} + 90° = \Phi_0 + \gamma \cos(nt + \beta).$$

Posant $\Phi_0 = \Phi'_0 + z$, Φ'_0 désignant la hauteur du pôle adoptée, z sa correction; et $\frac{Z_s - Z_i}{2} + 90° - \Phi'_0 = r$, on aura

$$r = z + \gamma \cos(nt + \beta),$$

ou, en faisant

$$\gamma \sin\beta = x, \qquad \gamma \cos\beta = y:$$

$$r = z + y \cos nt - x \sin nt,$$

équations d'où l'on pourra déduire, au moyen d'une série d'observations de passages supérieurs et inférieurs consécutifs, les inconnues z, y, x, donc γ et β, *indépendamment de toute erreur de réduction et même de position de l'étoile.*

Nous indiquerons ultérieurement quelques résultats que cette méthode nous a fournis.

Mais auparavant, il importe de montrer qu'on peut avantageusement faire usage également du caractère diurne de la nutation initiale, pour déterminer ses constantes au moyen des ascensions droites des étoiles, procédé dont il n'avait pas encore été fait usage.

Nous pourrons nous borner ici à considérer les seuls termes de la nutation initiale, le raisonnement que nous avons fait précédemment quant à tous les autres termes de réduction au lieu apparent étant applicable également dans ce cas-ci.

A l'ascension droite apparente, telle que les astronomes la calculent habituellement en négligeant la nutation initiale, il faut donc ajouter pour un passage supérieur,

$$\Delta\alpha_s = \gamma\{\cos\alpha \operatorname{tg}\delta \sin(nt + \alpha + \beta) - (\cot\varepsilon + \sin\alpha \operatorname{tg}\delta)\cos(nt + \alpha + \beta)\}$$

$$= \gamma\{\operatorname{tg}\delta \sin(nt + \beta) - \cot\varepsilon \cos(nt + \alpha + \beta)\};$$

et, pour un passage inférieur, puisque It augmente de π:

$$\Delta\alpha_i = -\gamma\{\operatorname{tg}\delta \sin(nt + \beta) - \cot\varepsilon \cos(nt + \alpha + \beta)\}.$$

Comme les autres termes de réduction sont égaux, à très peu près, pour deux passages consécutifs, il existera, du chef de la nutation initiale, entre les ascensions droites observées à ces deux passages, une différence [1]

$$\Delta^2\alpha = \pm\, 2\gamma \cot\varepsilon\{\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta \sin(nt + \beta) - \cos(nt + \alpha + \beta)\}.$$

On prendra le signe + ou le signe —, selon que le premier passage observé sera supérieur ou inférieur.

Faisant $2\gamma \cot\varepsilon \sin\beta = x$, $2\gamma \cot\varepsilon \cos\beta = y$, et désignant par τ le facteur $\operatorname{tg}\varepsilon \operatorname{tg}\delta$, on aura

$$\pm\, \Delta^2\alpha = u\{\tau\cos nt + \sin(nt + \alpha)\} + v\{\tau \sin nt - \cos(nt + \alpha)\} = gu + hv.$$

Cette équation, appliquée à une série d'observations de deux passages supérieur et inférieur consécutifs, permettra de déterminer u et v, d'où γ et β.

C'est par cette application aux séries des ascensions droites de la Polaire observées par Struve à Dorpat que j'ai commencé mes déterminations.

J'ai dit ci-dessus qu'elles ont été faites à l'occasion de mes recherches sur la nutation diurne.

Celle-ci, dont je crois avoir démontré l'existence (Annuaire de l'observatoire de Bruxelles pour 1890) n'est possible que si la terre se compose d'une écorce solide se mouvant plus ou moins librement sur un noyau fluide, au moins à sa surface.

---

[1] Afin d'abréger, nous avons négligé ici les 12^h dont le t de la seconde observation diffère de celui de la première, ce qui est sans conséquence. Il est fort aisé, du reste, de tenir compte de cette différence.

Telle était donc, pour moi, la constitution de la terre.

Mais alors, c'est du mouvement de l'écorce, et non du mouvement du globe, que le géomètre doit s'occuper; et les moments d'inertie A, B, C sont ceux de la première, non ceux du second.

Or dans les mouvements à très longue période, l'écorce et le noyau sont solidaires, comme l'a démontré M. RONKAR.[1]

Mais pour tous les autres termes, il n'en est plus ainsi.

Le mouvement de l'écorce s'effectuant en une période qui ne diffère que de $\frac{1}{300}$ environ de celle du mouvement du noyau, il en résulte un mouvement relatif de celle-là sur celui-ci d'une période de 300 jours environ.

Mais, pour une période d'aussi courte durée, on ne peut pas calculer A, B, C pour l'écorce comme pour le noyau.

Aussi avais-je déjà émis des doutes dans le volume de l'Annuaire cité ci dessus, p. 300, sur l'exactitude de la période de 305 jours calculée, par les astronomes, dans l'hypothèse d'une terre solide.

Afin de me mettre, autant que possible, à l'abri de l'erreur probable sur la période, c'est à dire sur la valeur de $n\iota$, qui doit être connue pour pouvoir résoudre les équations, j'ai pris trois séries d'observations faites pendant les mois de mars, avril et mai seulement des années 1823—24—25.

Elles ont fourni des résultats fort satisfaisants qui me confirmèrent dans mes doutes sur l'exactitude de la période de 305 jours, à laquelle correspondrait un accroissement annuel de β égal à 428°, tandis que je trouvais un accroissement supérieur d'assez peu à 360°.

Une série analogue d'observations de PREUSS, en 1838, a corroboré ces doutes, et m'a permis d'établir la véritable valeur de l'accroissement annuel de β, qui est de 390°.5, ce qui répond à une période de 336.5 jours moyens.

Fait surprenant, ce nouvel accroissement faisait merveilleusement concorder entre elles les déterminations de β faites par PETERS, NYRÉN

---

[1] RONKAR, *Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles intérieures dans les mouvements périodiques d'un système,* t. 2 des Mémoires couronnés, publiés par l'Académie royale de Belgique. 1888.

et Downing au moyen de très longues séries d'observations, tandis que toutes ces valeurs étaient discordantes si l'on partait de l'accroissement universellement admis de 428°.

Mes valeurs de la constante γ (0".08 en moyenne) concordaient également fort bien avec celles qui avaient été trouvées par Peters, Downing, Nyrén et Backhuyzen au moyen des variations de la latitude astronomique.

Mais, comme il ne s'agissait pas ici seulement de la solution d'une question astronomique plus ou moins importante, mais de la solution de cette question autrement grave: la terre est-elle solide, ou non? je ne me suis pas borné aux déterminations précédentes; j'ai appliqué également, aux couples d'observations de la latitude faites par Peters, les formules exposées ci-dessus.

Voici les résultats que m'ont fournies différentes séries, le centième de seconde étant pris pour unité.

				x	y	Poids
1° avril—juin	1842	Or.	1[er] avril	— 48.8	49.2	60
2° juillet—sept.	»	»	1[er] juillet	15.4	— 35.4	51
3° mars—avril	1843	»	1[er] mars	— 35.0	33.1	32
4° sept.—déc.	»	»	1[er] sept.	— 108.7	75.9	22
5° mars—mai	1844	»	1[er] avril	41.0	— 15.5	17

Comme l'angle β ne varie pas suffisamment dans l'étendue d'une même série pour qu'on puisse le déterminer d'une manière satisfaisante au moyen de celle-ci, nous combinerons la première série (la plus longue) avec chacune des autres, en supposant que l'angle β subisse l'accroissement annuel que nous avons déterminé de 390°.5.

Si l'on désigne par x et y les valeurs des inconnues, trouvées par l'une quelconque des séries 2°—5°, et ramenées au 1[er] avril 1842, par A l'accroissement de l'angle β de cette première origine à celle de la série considérée, par x_n, y_n les valeurs pour cette dernière origine, on aura très simplement

$$x = x_n \cos A - y_n \sin A,$$

$$y = x_n \sin A + y_n \cos A.$$

L'application de ces équations à chacunes des séries 2°—5° a donné

	x	y	poids
2°	33.4	19.3	51
3°	—33.8	34.2	32
4°	123.2	—48.9	22
5°	33.4	28.3	17

Et de ces valeurs, combinées respectivement avec les valeurs

1°	—48.8	49.2	60

on tire enfin, en calculant maintenant β par $\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{y}$:

—11.3	35.5	111	342°.7
—43.6	44.0	92	315 .2
— 6.66	22.9	82	353 .4
—30.6	44.6	77	325 .5.

On voit, dans la concordance des valeurs de β entre elles, la confirmation de l'exactitude et de la constance de la période que nous avons assignée à la nutation initiale.

A peine est-il besoin d'ajouter que l'application de la période de 305 jours, ou de l'accroissement annuel correspondant de 428°, eût conduit à des résultats absolument discordants.

Les précédents s'écartent encore quelque peu de celui que PETERS a déduit de l'ensemble de ses observations. Mais il faut considérer que les séries que nous avons employées sont peu nombreuses, que la détermination des latitudes est bien moins propre que celle des ascensions droites à la détermination d'une quantité aussi faible que la nutation initiale, que celle-ci enfin n'est pas encore connue d'une manière complète, comme il sera dit ci-dessous.

Les séries des observations consécutives de GYLDÉN et de NYRÉN étaient beaucoup moins nombreuses encore. Aussi n'ont-elles pas donné un résultat satisfaisant, quant à la détermination de l'angle β. Par contre, la combinaison de tous leurs couples d'observations nous a conduit à une valeur de γ égale à $0''.09$, qui diffère bien peu de celle que nous avons trouvée par les observations des passages de la Polaire de STRUVE.

Comparons maintenant les meilleures déterminations qui ont été faites de l'angle β aux résultats que fournit l'application de notre période.

Ces valeurs sont naturellement toutes ramenées à Poulkova.

Origine	Observations	Autorité	β observée	β calculée	O—C
1er janv. 1824	Polaire (Dorpat)	F. F.	151°.2		
» 1842	Latitude (Poulkova)	PETERS	341°.6	340°.2	1°.4
» 1850	Pr. vert. (Poulkova)	NYRÉN	224°	224°.2	—0°.2
» 1872	Latitude (Greenw.)	DOWNING	175°.2	175°.2	0°.0

On peut donc actuellement considérer deux des constantes de la nutation initiale comme exactement déterminées. Ces constantes sont

$$\gamma = 0''.08; \qquad \beta = 4^\circ \text{ (1890.0 Poulkova).}$$

Et, de plus, la non-solidité de la terre est démontrée.

Ces résultats ont été établis, comme on vient de le voir, grâce surtout au caractère diurne de cette nutation, qui avait été laissé dans l'oubli par les astronomes, et qui a permis de la déterminer indépendamment de toutes les erreurs de réduction.

Tout n'est pas dit encore, toutefois, sur la nutation initiale. Et il est très possible que mes recherches ultérieures sur ce sujet me conduisent à démontrer *à priori* l'existence de la nutation diurne.

Jusqu'ici elle ne peut être considérée que comme très probable.

La fluidité intérieure superficielle du globe n'entraîne, en effet, la nécessité de la nutation diurne que si $\frac{B-A}{C}$ est assez différent de zéro pour l'écorce, fait qu'on ne pourrait affirmer.

Mais si l'on peut le démontrer autrement que par la détermination même des constantes de la nutation diurne, l'existence de celle-ci sera prouvée à priori. Or, comme je l'ai dit ci-dessus, il existe dans l'expression de la nutation initiale un second terme, qui à été négligé par tous les astronomes, et que j'ai commencé par négliger moi-même, quoiqu'il figure dans mes formules comme dans celles de LAPLACE.[1]

[1] Voici la note que j'ai insérée à ce sujet dans mon Traité des réductions stellaires: Dans la pratique, on est astreint à poser $x = 0$, vu l'ignorance où l'on se trouve quant à la valeur de $B - A$, qui est certainement très petite.

C'est à la négligence de ce terme, me suis-je dit, que sont dues peut être les discordances que j'ai signalées ci-dessus dans les résultats déduits des séries d'observations de PETERS, de GYLDÉN et de NYRÉN.

Et je me propose de rechercher ultérieurement si ces discordances ne disparaîtront pas en faisant usage de l'expression complète de la nutation initiale, au lieu de se borner à n'en considérer que le premier terme.

Si l'on désigne par l et m les vitesses angulaires de l'écorce terrestre autour des axes des moments A et B, les parties de ces vitesses qui proviennent des conditions initiales du mouvement seront

$$l = \alpha_1 \cos(n\iota t + \beta_1),$$

$$m = \alpha_1 \sqrt{\frac{Aa}{Bb}} \sin(n\iota t + \beta_1),$$

n étant la vitesse angulaire autour de l'axe de C, supposée constante, ι, a et b représentant respectivement $\sqrt{\frac{ab}{AB}}$, $C - A$ et $C - B$.

Bornons-nous à considérer ici la variation qui en résulte en obliquité:

$$\frac{d\theta}{dt} = - l \cos\varphi + m \sin\varphi,$$

où φ est $nt + L$, et L la longitude du premier méridien, passant par l'axe du moment A; nous trouverons, en posant $\sqrt{\frac{Aa}{Bb}} = 1 + x$:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha_1 \left\{ \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sin(n\iota t + nt + \beta_1 + L) - \frac{x}{2} \sin(n\iota t - nt + \beta_1 - L) \right\}.$$

La présence de nt montre que $\frac{d\theta}{dt}$ change de signe d'un passage supérieur au passage inférieur consécutif dans le méridien *géographique*.

Occupons-nous donc seulement du passage supérieur; nous ferons $nt = \alpha$, et, de plus, $\beta_1 + L = \beta$, d'où $\beta_1 - L = \beta - 2L$, ce qui donnera

$$\frac{d\theta}{dt} = -\alpha_1 \left\{ \left(1 + \frac{x}{2}\right) \sin(n\iota t + \alpha + \beta) - \frac{x}{2} \sin(n\iota t - \alpha + \beta - 2L) \right\}.$$

On n'a fait usage jusqu'ici que du premier terme de cette expression, en négligeant x.

Mais x est-il négligeable?

Nous ne le pensons pas.

Le développement de son expression donne

$$A(C - A) = B(C - B)\{1 + 2x + x^2\},$$

d'où

$$(B - A)(B + A - C) = 2B(C - B)x\left(1 + \frac{x}{2}\right),$$

et

$$2x\left(1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{B - A}{C - B}\left\{1 - \frac{C - A}{B}\right\}.$$

Or, nous ne pensons pas que la fraction $\frac{B - A}{C - B}$ soit insensible, pour l'écorce terrestre surtout.

Si elle ne l'est pas, il y a lieu de rechercher quel est le second terme de la nutation initiale, dont aucun astronome ne s'est occupé.

Et si l'observation donne, pour ce second terme, une valeur appréciable, peut-être alors les discordances signalées ci-dessus disparaîtront-elles, mais surtout l'existence de la nutation diurne sera prouvée à priori.

Les coefficients η et N de la nutation diurne et de la nutation annuelle qui figurent ci-dessus, p. 368, sont entre eux dans le rapport

$$\frac{\eta}{N} = \frac{(B - A)(B + A - C)}{(B + A)(B - A + C)},$$

ou, puisque

$$(B - A)(B + A - C) = 2B(C - B)x\left(1 + \frac{x}{2}\right),$$

dans le rapport

$$\frac{\eta}{N} = 2x\left(1 + \frac{x}{2}\right)\frac{B(C - B)}{(B + A)(C + B - A)}.$$

Si donc $2x\left(1 + \frac{x}{2}\right)$ est appréciable dans la nutation initiale, $\frac{\eta}{N}$ le sera également.

Et, comme le mouvement de l'écorce est beaucoup plus indépendant de celui du noyau dans la nutation diurne que dans la nutation initiale, la première sera sensible si x l'est dans la seconde.

A ceci ne se bornent pas les conséquences analytiques de la fluidité intérieure du globe.

Et l'on va voir de combien de points, restés jusqu'ici obscurs, rend compte cette circonstance, dont aucun géomètre ne s'était encore occupé.

Mais auparavant, il est nécessaire que nous exposions d'abord, d'une manière un peu plus détaillée que nous ne l'avons fait ci-dessus, les résultats auxquels l'analyse est arrivée dans l'étude des mouvements périodiques d'un système de points matériels soumis à des forces extérieures en même temps qu'au frottement et aux actions mutuelles de ces points les uns sur les autres.

Ces résultats, établis par M. RONKAR,[1] sont les suivants:

Dans un semblable système,

1° les mouvements à très longue période s'effectuent comme si tous les points étaient solidaires;

2° les mouvements à très courte période, comme si tous ces points étaient indépendants les uns des autres;

3° dans les mouvements à période intermédiaire, il n'y a ni indépendance ni solidarité absolues entre les différents points du système.[2]

Appliquons ces résultats au globe terrestre supposé constitué d'un noyau solide recouvert d'une couche fluide, et celle-ci d'une écorce également solide.

La précession, qui est un mouvement à très longue période, s'effectuera comme si la terre était solide; c'est-à-dire que les moments d'inertie A, B, C, qui entrent dans l'expression de sa constante, seront ceux de la terre entière.

La nutation diurne, dont la période est d'un demi jour sidéral seulement, s'effectuera à peu près comme si l'écorce était indépendante du noyau; c'est-à-dire que les moments A_1, B_1, C_1 qui entrent dans l'expression de sa constante, seront ceux de l'écorce solide. Quant à la nutation initiale, la question doit être examinée de plus près.

Cette nutation consiste en un mouvement de l'axe géographique du

---

[1] RONKAR *Sur l'influence du frottement et des actions mutuelles intérieures dans les mouvements périodiques d'un système,* t. 2 des Mémoires couronnés, publiés par l'Acad. roy. de Belgique. 1888.

[2] Ce point capital est corroboré par la haute autorité de Sir W. THOMSON, qui a dit:

»En la supposant rigide, l'écorce entraînerait complètement le noyau dans les oscillations à longues périodes, telles que la précession; mais les nutations à courte période (notamment celles de six mois et de quatorze jours) seraient fort altérées si non dénaturées.» (TISSERAND, Méc. Cél. t. 2, p. 480.)

monde, composé de deux parties dont les périodes sont respectivement $\frac{2\pi}{n(1+\iota)}$ et $\frac{2\pi}{n(1-\iota)}$.

En même temps donc que la terre effectue son mouvement de rotation autour de l'axe instantané en une période égale à $\frac{2\pi}{n}$, l'axe géographique a un double mouvement dont les périodes diffèrent très peu de celle-ci. Il en résulte chaque jour un faible déplacement du pôle géographique par rapport au pôle instantané; ou, puisque le pôle géographique peut être considéré comme fixe sur la terre, on peut dire que le pôle instantané se déplace autour de celui-ci, et nous avons vu que l'observation assigne a ce mouvement une période de 336.5 jours moyens.

Telle est donc, en réalité, la période du mouvement relatif de l'écorce sur le noyau dans la nutation initiale, quoique la période du mouvement absolu qu'elle produit soit d'un jour sidéral environ.

Cette période de 336.5 jours approche très fort de celle des termes de la nutation qui dépendent de la simple longitude du soleil.

Tous les astronomes et géomètres, même dans les Traités les plus récents, l'ont calculée dans l'hypothèse d'une terre solide, et l'ont donnée comme égale à $\frac{2\pi}{n}\frac{A}{C-A} = 305$ jours sidéraux, en adoptant pour $\frac{A}{C-A}$ la valeur qui résulte des constantes de la précession et de la nutation.

Or, comme nous l'avons dit ci-dessus, si dans le mouvement de précession et peut-être dans celui qui dépend du noeud de la Lune, l'écorce peut être considérée comme solidaire avec le noyau, il n'en est pas de même dans les mouvements à période intermédiaire.

Pour ces derniers les valeurs $\frac{A'}{C'}$, $\frac{B'}{C'}$ sont intermédiaires entre les valeurs $\frac{A}{C}$, $\frac{B}{C}$ trouvées pour la terre entière et les valeurs $\frac{A_1}{C_1}$, $\frac{B_1}{C_1}$ applicables à l'écorce seule, c'est-à-dire aux mouvements à très courte période, comme la nutation diurne.

L'observation m'a démontré que, dans le mouvement relatif d'une période de 11 mois produit par la nutation initiale, $\frac{A'}{C'-A'} = 336.5$ jours moyens $= 337.4$ jours sidéraux. On a donc

$$\frac{C'-A'}{A'} = \frac{C-A}{A} \cdot \frac{305}{337.4} = 0.9\frac{C-A}{A}.$$

Or ce coefficient $\frac{C-A}{A}$, que nous avons représenté ci-dessus par N, figure dans tous les termes de la précession et de la nutation. Pour la première il peut se calculer en rapportant A et C à la terre entière, et nous admettrons qu'il en est de même pour le second.

Mais nous venons de voir qu'il n'en est plus de même pour des termes d'une période de 11 mois; à plus forte raison pour ceux d'une période de 6 mois, d'un mois et moins encore.

Tous les termes solaires et lunaires de la nutation, que les astronomes ont calculés au moyen de la valeur $\frac{C-A}{A}$ rapportée à la terre solide, sont donc fautifs.

Il n'est pas possible actuellement à la théorie de déterminer dans quel rapport $\frac{C-A}{A}$ doit être modifié pour ces différents termes, et c'est à l'observation que s'impose cette recherche excessivement laborieuse.

S'il est permis de conclure par analogie, le coefficient des termes annuels de la nutation devra être réduit de 0.1 de sa valeur; mais quant aux termes en $2\odot$, la réduction sera peut être encore plus considérable.

Tirons maintenant quelques conséquences frappantes des prémisses que nous venons de poser.

Rappelons d'abord que les astronomes n'ont encore tenu aucun compte, dans leurs réductions, de la nutation initiale, dont la période est, pour les observations méridiennes, de 336.5 jours moyens, c'est-à-dire approche d'assez près de l'année;

qu'ils ont employé un coefficient fautif pour les termes solaires de la nutation (en laissant ici de côté les erreurs sur les termes lunaires, et en admettant qu'elles se compensent dans une longue série d'observations);

qu'ils n'ont tenu aucun compte de la nutation diurne, qui renferme également des termes solaires appréciables.

Quelle confiance avoir, dès lors, dans les déterminations de la constante de l'aberration? Quoi d'étonnant si l'on ne trouve pas, dans ces déterminations, la concordance qu'il serait permis d'attendre d'observations et de réductions bien faites, et si elles ont conduit presque toutes à des parallaxes négatives?

Tout est donc à reprendre à nouveau en astronomie: la théorie du mouvement de rotation de *l'écorce terrestre* en tenant compte du frottement et des réactions intérieures du noyau, et les formules de rotation qui en découlent.

La théorie n'en sera pas faite avant quelques années;[1] et les observations, réduites selon les principes que nous venons d'exposer, dans l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe, pourront conduire plus tôt à des résultats satisfaisants.

Elles nous ont déjà démontré cette fluidité intérieure en opposant à la période théorique de 305 jours, calculée dans l'hypothèse de la solidité du globe, une période de 336.5 jours,[2] et elles ont, par là même, établi, avec une probabilité très grande, l'existence de la nutation diurne.

Elles me conduiront peut être très prochainement à la démonstration à priori de cette existence par celle d'un second terme de la nutation initiale, négligé par tous les astronomes, parce qu'ils ont fait $B = A$.

Et il nous sera permis de regretter que, dans les traités même les plus récents, on ait omis d'examiner au moins, d'une manière approfondie, l'influence que l'hypothèse de la fluidité intérieure du globe pourrait avoir sur les coefficients des termes de la nutation, malgré les travaux que nous avons publiés sur ce sujet,[3] et qu'on ait même cru pouvoir contester l'existence de la nutation diurne, en en calculant le coefficient comme si la terre était solide!

Bruxelles, 23 juin 1891.

---

[1] Cette question vient d'être mise au concours par l'Académie de Belgique.

[2] Des recherches subséquentes m'ont conduit à admettre une période de 398 jours, qui s'écarte davantage encore de la valeur théorique.

[3] *Théorie des mouvements diurne, annuel et séculaire de l'axe du monde.* 1888.
Traité des réductions stellaires. 1888.
Annuaires de l'observatoire royal de Bruxelles. 1888—1891.
Bulletin de l'Académie royale de Belgique. 1885—1891.
Astronomische Nachrichten. 1889—1890.
Bulletin Astronomique. 1890.

SOPHIE KOVALEVSKY.

Notice biographique

PAR

G. MITTAG-LEFFLER.

Sophie Corvin-Kroukovsky naquit à Moscou, le $\frac{8}{15}$ janvier 1850.[1] En septembre 1868 elle épousa Woldemar Kovalevsky, plus tard paléontologue distingué, et au printemps suivant, se rendit avec lui à Heidelberg. Là elle suivit assidûment les cours pendant trois semestres entiers, en étudiant les mathématiques et la physique sous la direction de Kirchhoff, de Königsberger, de du Bois-Reymond et de Helmholtz. Dès l'âge de quinze ans, elle s'était adonnée avec passion à l'étude des mathématiques; aussi, à son arrivée à Heidelberg, les éléments de la géométrie et du calcul infinitésimal lui étaient-ils depuis longtemps familiers. En octobre 1870 elle se rendit à Berlin, où elle passa, — sauf de courtes absences motivées par des voyages en France — quatre années entières à étudier les mathématiques sous la direction spéciale de Weierstrass.

Dans le courant de l'été de 1874 Sophie Kovalevsky fut promue, par la faculté de philosophie de Göttingue, au grade de docteur en philosophie, *in absentia* et sans examen oral. Comme thèse, elle avait présenté son mémoire *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen,* publié

[1] Cette date est fournie par son acte de naissance dont une copie, délivrée par le consistoire de Moscou le $\frac{5}{17}$ février 1851, a été retrouvée parmi les papiers de la défunte.

dans le journal de Crelle, tome 80. Mais en outre, elle avait présenté à la faculté deux autres travaux, l'un, *Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale* 3^{ten} *Ranges auf elliptische Integrale,* publié plus tard dans ce journal, tome 4; l'autre: *Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe,* publié dans les *Astronomische Nachrichten,* tome 3.

Après sa promotion elle retourna en Russie. Le $\frac{5}{17}$ octobre 1878 elle y donna le jour à une fille qui lui a survécu. En mars 1883 Woldemar Kovalevsky mourut à Moscou dans de tragiques circonstances. Elle se trouvait alors à Paris: en apprenant la mort de son mari, et les circonstances qui l'avaient accompagnée, elle tomba malade et flotta, un mois durant, entre la vie et la mort.

Vers la fin de juin, remise enfin de sa maladie, elle alla rejoindre à Berlin son fidèle ami et professeur, Weierstrass. Elle reprit avec ardeur ses travaux de mathématiques et termina les recherches qu'elle a publiées sous le titre: *Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln,* ce journal, tome 6. Dans le présent tome de cette publication, M. Vito Volterra a repris cette même question: il a montré que les fonctions données par Sophie Kovalevsky comme intégrales générales des équations différentielles de Lamé, ne satisfont pas à ces équations, et il a donné les raisons de ce fait.

Quelques années avant la mort de son mari, Sophie Kovalevsky avait exprimé le désir de se vouer à l'enseignement public et de professer dans une université. Ayant eu connaissance de son souhait et partageant depuis longtemps la haute opinion qu'avait M. Weierstrass sur le talent exceptionnel de son élève, j'avais pendant l'automne de 1880 formé le projet de faire nommer Sophie Kovalevsky mon *docent* (professeur agrégé) à l'université de Helsingfors, où j'occupais alors la chaire de mathématiques. Ce projet échoua; mais lorsqu'au printemps de 1881 je fus appelé à l'université nouvelle fondée à Stockholm, j'entamai immédiatement des négociations avec les autorités universitaires, dans le but de faire désigner M$^{\text{me}}$ Kovalevsky comme mon professeur agrégé, si elle y consentait.

Pour elle-même, les principales difficultés qui s'étaient opposées jusqu'alors à la réalisation de son désir, venaient de disparaître à la mort de son mari. Par une lettre du 5 août 1883, M. Weierstrass m'annonça qu'elle était disposée à faire un cours de mathématiques à Stockholm, mais que, pour commencer, elle ne voulait donner à ce cours aucun caractère de publicité. En décembre 1883 Sophie Kovalevsky arriva à Stockholm, et pendant le semestre de printemps de 1884, devant un auditoire restreint, mais attentif, elle exposa, en langue allemande, la théorie des équations aux dérivées partielles. Grâce au succès de ce cours, ainsi qu'à l'impression produite sur les cercles intelligents de Stockholm par la personnalité sympathique et géniale de la conférencière, il me fut possible de procurer des fonds suffisants pour faire nommer Sophie Kovalevsky professeur d'analyse supérieure à l'université de Stockholm, pour une période de cinq ans. Malgré le peu de temps qu'elle avait vécu en Suède, elle possédait déjà assez notre langue pour pouvoir enseigner en suédois dès son début comme professeur à l'université.

Avant l'expiration de la période quinquennale, Sophie Kovalevsky remporta à l'Institut de France le prix Bordin pour son travail *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* (ce journal, tome 12 et *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de l'Institut national de France,* tome 31).

Cette circonstance facilita mes efforts pour réunir les fonds nécessaires à l'établissement définitif de la chaire d'analyse supérieure à l'université de Stockholm. Ce fut au printemps de 1889 que notre université put s'assurer des services continués de Sophie Kovalevsky en la nommant professeur *à vie.*

Ce ne devait pas être pour longtemps.

Sophie Kovalevsky avait passé ses vacances de l'hiver 1890—91 dans le Midi, au littoral méditerranéen de la France. Pendant le voyage de retour elle eut un refroidissement, et le 6 février 1891, après avoir fait dans la matinée sa première leçon de l'année, elle fut contrainte de s'aliter, pour ne plus se lever. Elle expira le 10 février, au matin, d'une pleurésie violente, qui était vraisemblablement une forme de l'influenza, et qui, dès le début, défia tout l'art des médecins.

Il est superflu de retracer aux lecteurs de cette revue l'oeuvre mathématique de Sophie Kovalevsky. On trouvera ci-dessous une liste complète de ses ouvrages scientifiques ainsi que des cours qu'elle a professés à l'université de Stockholm.

La phototypie placée en tête de ce numéro a été exécutée à Stockholm, d'après une photographie datant de l'année 1887, époque à laquelle Sophie Kovalevsky était arrivée à l'apogée de sa carrière de mathématicien, de professeur et de savant.

Comme mathématicien, Sophie Kovalevsky appartient entièrement à l'école de Weierstrass. Elle était pleine d'enthousiasme et de foi pour les idées de son maître, ce vénérable vieillard qui a survécu à la mort de son élève bien aimée. Elle voulait, par ses propres travaux mathématiques et par de nouvelles découvertes, prouver la portée et l'étendue de la doctrine de Weierstrass. Comme professeur, elle s'efforçait, avec un zèle véritablement contagieux, d'exposer la pensée fondamentale de cette doctrine à laquelle elle attribuait la plus grande importance, même pour la solution des problèmes les plus essentiels de la vie. Constamment et avec une joie manifeste, elle communiquait l'extraordinaire richesse de son savoir et les profonds aperçus de son esprit divinateur à ceux de ses élèves qui montraient seulement la force et le vouloir de puiser à cette source. Personnellement, elle était extrêmement simple. Elle joignait, à une instruction étendue dans les différentes branches de la science humaine, l'intelligence sûre, vive et sympathique de ce qu'il y a de personnel chez chacun de nous: aussi plus d'un homme, plus d'une femme, et non des moins remarquables, lui ont, sous l'influence de cet intérêt qu'elle inspirait, et presque dès la première rencontre, confessé leurs sentiments et leurs pensées les plus intimes, les espérances et les doutes du chercheur, la faiblesse cachée de nouvelles doctrines, les raisons sur lesquelles se fondaient de futures attentes, comme du reste on lui a confié bien des fois les rêves de félicité et la douleur causée par des déceptions du coeur. Ces qualités qu'elle a apportées dans la carrière du professorat font comprendre sur quel fondement reposaient ses relations avec ses élèves.

Plus que les autres sciences, les mathématiques exigent de ceux qui sont appelés à augmenter par de nouvelles conquêtes le domaine du savoir, une imagination puissante. La clarté de la pensée n'a jamais, à elle seule, fait de découvertes. La meilleure oeuvre du mathématicien est de l'art, un art élevé, parfait, hardi comme les rêves les plus secrets de l'imagination, clair et limpide comme la pensée abstraite. Le génie mathématique et le génie artistique se touchent, et il faudrait même expliquer pourquoi ces deux sortes de génies se développent si rarement chez le même homme. Sophie Kovalevsky avait dès sa jeunesse hésité entre les mathématiques et la littérature. Déjà elle avait publié des esquisses littéraires et collaboré sous l'anonyme à quelques oeuvres. Pendant la période de fatigue qui suivit la publication de son travail sur le problème de la rotation, elle eut envie de produire une oeuvre littéraire qui fut originale et de valeur durable, et elle fit paraître en 1889 à Noël, en suédois et en danois, le livre *La vie russe, les soeurs Rajevsky*. Une rédaction un peu différente fut publiée en russe. C'est une description de la maison paternelle et de sa propre jeunesse. La critique litteraire de la Russie et des pays scandinaves fut unanime à déclarer que Sophie Kovalevsky avait égalé par le style et la pensée les meilleurs écrivains de la littérature russe. Ce succès et la joie de trouver le chemin des coeurs — après n'avoir pu parler qu'à un petit nombre dans ses travaux de mathématiques — déterminèrent Sophie à se vouer plus sérieusement à la littérature, et elle le fit avec ce zèle brûlant qu'elle portait en toutes choses. Elle commença divers ouvrages, mais un seul put être terminé et pourra être publié à l'aide des courtes indications qu'elle a données quelques jours avant sa mort. C'est un roman qui paraîtra en différentes langues, une étude psychologique sur la Russie contemporaine, que des connaisseurs ont déclarée tout-à-fait remarquable.

La mort n'a pas seulement anéanti un avenir littéraire qui semblait plein d'extraordinaires promesses; elle a interrompu différents travaux de mathématiques, et notamment la conclusion de l'étude sur le problème de la rotation.

Sophie Kovalevsky gardera une place éminente dans l'histoire des mathématiques, et son oeuvre posthume qui doit bientôt paraître, conservera son nom dans l'histoire de la littérature. Mais ce n'est peut-être ni comme mathématicien ni comme littérateur qu'il sied d'apprécier et de juger avant tout cette femme de tant d'esprit et d'originalité; comme *personnalité*, elle était encore plus remarquable qu'on ne pourrait le croire d'après ses travaux. Tous ceux qui l'ont connue et approchée, à quelque cercle, à quelque partie du monde qu'ils appartiennent, resteront constamment sous la vivante et forte impression que produisit sa personne.

Octobre 1892.

Liste des publications scientifiques de Sophie Kovalevsky et de ses cours professés à l'université de Stockholm.

Publications scientifiques.

1. Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen.
(*Inaugural-Dissertation,* 1874; *Journal für die reine und angewandte Mathematik,* t. 80, p. 1—32, Berlin 1875.)
2. Über die Reduction einer bestimmten Klasse Abel'scher Integrale 3^{ten} Ranges auf elliptische Integrale.
(*Acta mathematica,* t. 4, p. 393—414, Stockholm 1884.)
3. Om ljusets fortplantning uti ett kristalliniskt medium.
(*Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar,* t. 41, p. 119—121, Stockholm 1884.)
4. Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé.
(*Comptes rendus des séances de l'académie des sciences,* t. 98, p. 356—357, Paris 1884.)
5. Über die Brechung des Lichtes in cristallinischen Mitteln.
(*Acta mathematica,* t. 6, p. 249—304, Stockholm 1883.)
6. Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnsringe.
(*Astronomische Nachrichten,* t. 111, p. 37—48, Kiel 1885.)
7. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.
(*Acta mathematica,* t. 12, p. 177—232, Stockholm 1889.)
8. Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.
(*Acta mathematica,* t. 14, p. 81—93, Stockholm 1890.)
9. Mémoire sur un cas particulier du problème de la rotation d'un corps pesant autour d'un point fixe, où l'intégration s'effectue à l'aide de fonctions ultraelliptiques du temps.
(*Mémoires présentés par divers savants à l'académie des sciences de l'institut national de France,* t. 31, p. 1—62, Paris 1890.)
10. Sur un théorème de M. Bruns.
(*Acta mathematica,* t. 15, p. 45—52, Stockholm 1891.)

Cours professés à l'université de Stockholm.

1. Théorie des équations aux dérivées partielles.
   (Automne de 1884.)
2. Théorie des fonctions algébriques d'après M. Weierstrass.
   (Printemps de 1885.)
3. Algèbre élémentaire.
   (Printemps de 1885.)
4. Théorie des fonctions abéliennes d'après M. Weierstrass.
   (Depuis l'automne de 1885 jusqu'au printemps de 1887.)
5. Théorie des fonctions potentielles.
   (Printemps de 1886.)
6. Théorie du mouvement d'un corps solide.
   (Automne de 1886 et printemps de 1887.)
7. Sur les courbes définies par les équations différentielles, d'après M. Poincaré.
   (Automne de 1887 et printemps de 1888.)
8. Théorie des fonctions θ, d'après M. Weierstrass.
   (Printemps de 1888.)
9. Applications de la théorie des fonctions elliptiques.
   (Automne de 1888.)
10. Théorie des fonctions elliptiques d'après M. Weierstrass.
    (Automne de 1889.)
11. Théorie des équations aux dérivées partielles.
    (Printemps de 1890.)
12. Application de l'analyse à la théorie des nombres entiers.
    (Automne de 1890.)